บทที่ 3
การหาคำตอบของปัญหาขอบเขตชนิดเอกพันธ์

ในการหาคำตอบของปัญหาขอบเขตชนิดเอกพันธ์ (Homogeneous Boundary value problem) มีวิธีหาได้หลายวิธี วิธีหนึ่งซึ่งมีประโยชน์มากซึ่งจะกล่าวถึงในบทนี้คือการหาคำตอบโดยวิธีแยกตัวแปร นอกจากนี้จะกล่าวถึงการหาคำตอบในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง (eigenfunction) ซึ่งอาศัยคุณสมบัติความเป็นออร์โทโกนัลของฟังก์ชัน และยังได้ศึกษาถึงสูตรของกรีนและการประยุกต์ เพื่อศึกษาคุณสมบัติบางประการของค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจง

3.1 การแยกตัวแปร (Separation of variables)

วิธีการคือสมมติให้คำตอบของสมการอยู่ในรูปผลคูณของ 2 ฟังก์ชัน ซึ่งถูกแยกตัวแปรแล้ว แล้วแทนค่าในสมการหาคำตอบดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ปัญหาขอบเขตของ

$$u_x + 2u_y = u$$

$$u(x, 0) = 3e^{-5x} - 2e^{-2x}$$

วิธีทำ ให้คำตอบคือ $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$

เมื่อ $X(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

และ $Y(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว

แทนค่า $u(x, y)$ ในสมการที่กำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial x}(XY) + 2\frac{\partial}{\partial y}(XY) = XY$$

$$X'Y + 2XY' = XY$$

หรือ $$(X' - X)\,Y = -2XY'$$

$$\frac{X'-X}{-2X} = \frac{Y'}{Y}$$

เนื่องจากทางซ้ายมือของสมการเป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และทางขวามือของสมการเป็นฟังก์ชันของ y อย่างเดียว x และ y เป็นตัวแปรซึ่งไม่ขึ้นแก่กัน ดังนั้นสมการเป็นจริงได้ เมื่อเท่ากับค่าคงตัวเท่านั้น นั่นคือ

$$\frac{X'-X}{-2X} = \frac{Y'}{Y} = c \text{ , } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$\therefore \qquad \frac{X'-X}{-2X} = c$$

หรือ $X' - X + 2cX = 0$

$X' - (1-2c)X = 0$

ซึ่งมีคำตอบเป็น

$X(x) = ae^{(1-2c)x}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

สมการ $\frac{Y'}{Y} = c$

$Y' - cY = 0$

มีคำตอบเป็น

$Y(y) = be^{cy}$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $u(x, y) = ke^{(1-2c)x}.e^{cy}, k = ab$

$= ke^{(1-2c)x+cy}$

จะเห็นว่า $u(x, 0) = ke^{(1-2c)x} = 3e^{-5x} - 2e^{-2x}$

ไม่ว่าจะเลือก k และ c อย่างไรก็จะหาคำตอบไม่ได้ แต่จากคุณสมบัติ Principle of superposition จะได้ว่า

$$u(x, y) = k_1e^{(1-2c_1)x + c_1y} + k_2e^{(1-2c_2)x + c_2y}$$

ก็เป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้น $k_1 e^{(1-2c_1)x} + k_2 e^{(1-2c_2)x} = u(x, 0) = 3e^{-5x} - 2e^{-2x}$

$\therefore \quad k_1 = 3$ และ $k_2 = -2$

$1 - 2c_1 = -5$

จะได้ $c_1 = 3$

และ $1 - 2c_2 = -2$

$c_2 = \frac{3}{2}$

คำตอบคือ $u(x, y) = 3e^{-5x+3y} - 2e^{-2x+\frac{3}{2}y}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาขอบเขตของสมการความร้อนโดยวิธีแยกตัวแปร

D.E. $\quad u_t = ku_{xx}, \; 0 < x < 1, \; t > 0$

B.C. $\quad \left.\begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{array}\right., \; t > 0$

I.C. $\quad u(x, 0) = 5 \sin \frac{\pi x}{2}, \; 0 < x < 1$

วิธีทำ สมมุติให้คำตอบคือ $u(x, t) = T(t)\,\varphi(x)$

เมื่อ $T(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t อย่างเดียว

และ $\varphi(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการ D.E. ที่กำหนดให้

$$\frac{\partial}{\partial t}(T\varphi) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2}(T\varphi)$$

$$T'\varphi = kT\varphi''$$

หรือ
$$\frac{T'}{kT} = \frac{\varphi''}{\varphi} \qquad \text{..........(3.1.1)}$$

สมการ (3.1.1) เป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อเท่ากับค่าคงตัวเท่านั้น

$$\therefore \quad \frac{T'}{kT} = \frac{\varphi''}{\varphi} = c$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

หรือ $\quad T' = ckT$ และ $\varphi'' = c\varphi$ ....(3.1.2)

ในที่นี้จะพิจารณาค่า c เป็น 3 กรณีคือ $c > 0, c = 0, c < 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $c > 0$ ให้ $c = \alpha^2$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\alpha \neq 0$

จะได้ $T' - \alpha^2 kT = 0$ และ $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$

ซึ่งมีคำตอบเป็น $T(t) = c_1 e^{\alpha^2 kt}$

และ $\varphi(x) = c_2 \cos h\, \alpha x + c_3 \sin h\, \alpha x$

$\therefore\ u(x, t) = e^{\alpha^2 kt}(A \cos h\, \alpha x + B \sin h\, \alpha x)$

เมื่อ $A = c_1c_2$ และ $B = c_1c_3$

จากเงื่อนไข $u(0, t) = A = 0$

$u(1, t) = B e^{\alpha^2 kt} \sin h\, \alpha = 0$

แต่ $\sin h\, \alpha \neq 0$ $\therefore\ B = 0$

$\therefore\ u(x, t) = 0$ ทุก x ซึ่งเป็นคำตอบซึ่งไม่ต้องการหาเรียกว่า trivial solution

$\therefore\ c > 0$ ไม่ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $c = 0$ ดังนั้นสมการ (3.12) คือ

$$T' = 0 \text{ และ } \varphi'' = 0$$

จะได้ $T = c_1$ และ $\varphi = c_2x + c_3$

$u(x, t) = c_1(c_2x + c_3) = Ax + B$ เมื่อ $A = c_1c_2,\ B = c_1c_3$

$u(0, t) = B = 0$

$u(1, t) = A = 0$

$\therefore\ u(x, t) = 0$

$\therefore\ c = 0$ ใช้ไม่ได้

กรณีที่ 3 ถ้า $c < 0$ ให้ $c = -\lambda^2$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

จากสมการ (3.1.2) จะได้

$$T' + k\lambda^2 T = 0 \text{ และ } \varphi'' + \lambda^2\varphi = 0$$

ซึ่งมีคำตอบเป็น $T(t) = c_1 e^{-k\lambda^2 t}$

$\varphi(x) = c_2 \cos \lambda x + c_3 \sin \lambda x$

$\therefore\ u(x, t) = e^{-k\lambda^2 t}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$

เมื่อ $A = c_1c_2$ และ $B = c_1c_3$

จากเงื่อนไข $u(0, t) = Ae^{-k\lambda^2 t} = 0$

$$\therefore \quad A = 0$$

$$u(1, t) = Be^{-k\lambda^2 t}\sin\lambda = 0$$

แต่ $B \neq 0$ เพราะว่าถ้า $B = 0$ $u(x, t)$ จะ $= 0$ ซึ่งใช้ไม่ได้

$$\therefore \quad \sin\lambda = 0 = \sin n\pi \quad n = 1, 2, \ldots..$$

$$\lambda = n\pi$$

$$\therefore \quad u(x, t) = Be^{-kn^2\pi^2 t}\sin n\pi x$$

จากเงื่อนไขเริ่มแรก $u(x, 0) = B\sin n\pi x = 5\sin\frac{\pi}{2}x$

$$\therefore \quad B = 5 \text{ และ } n = \frac{1}{2}$$

และคำตอบคือ $u(x, t) = 5e^{-0.25\,k\,\pi^2 t}\sin\frac{\pi}{2}x$

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้ปัญหาขอบเขตของสมการคลื่น

D.E. $\quad u_{tt} = u_{xx}\,,\ t > 0, 0 < x < 10$

B.C. $\quad u(0, t) = 0,\ u(10, t) = 0,\ t > 0$

I.C. $\quad u(x, 0) = \sin\frac{3\pi}{2}x\,,\ u_t(x, 0) = 0$

วิธีทำ ให้คำตอบคือ $u(x, t) = T(t)\,\varphi(x)$

$$\therefore \quad T''\varphi = T\varphi''$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\varphi''}{\varphi} = k \text{ ค่าคงตัว}$$

กรณีที่ $k > 0$ และ $k = 0$ จะได้คำตอบ $u(x, t) = 0$

ถ้า $k < 0$ ให้ $k = -\lambda^2$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

$$\therefore \quad T''+\lambda^2 T = 0$$

$$\varphi''+\lambda^2\varphi = 0$$

ซึ่งจะได้คำตอบ

$$T(t) = c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t$$

$$\varphi(x) = c_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x$$

จากเงื่อนไข $u(0, t) = T(t)\,\varphi(0) = 0 \quad \therefore \ \varphi(0) = 0$

$$\varphi(0) = c_3 = 0$$

$$\therefore \quad u(x, t) = c_4\sin\lambda x\,(c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t)$$

$$= \sin\lambda x\,(A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)$$

$$u(10, t) = \sin 10\,\lambda(A\cos\lambda t + B\sin\lambda t) = 0$$

$$\therefore \qquad \sin 10\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$10\lambda = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{10} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$u(x, t) = \sin\frac{n\pi x}{10}\left(A\cos\frac{n\pi t}{10} + B\sin\frac{n\pi t}{10} \right)$$

$$u_t(x, t) = \sin\frac{n\pi x}{10}\left(-A\frac{n\pi}{10}\sin\frac{n\pi t}{10} + B\frac{n\pi}{10}\cos\frac{n\pi}{10}t \right)$$

จาก I.C. $u_t(x, 0) = 0 = \sin\frac{n\pi x}{10}\left(B\frac{n\pi}{10} \right)$

$$\therefore \qquad B = 0$$

ดังนั้น $\quad u(x, t) = A\sin\frac{n\pi x}{10}\cos\frac{n\pi t}{10}$

และ $\quad u(x, 0) = A\sin\frac{n\pi x}{10} = \sin\frac{3\pi x}{2}$

$$\therefore \quad A = 1, \; n = \frac{3}{2}\times 10 = 15$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$u(x, t) = \sin\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{3\pi t}{2}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้ปัญหาขอบเขตของสมการคลื่นของตัวที่ 3 ถ้าเงื่อนไข I.C. เปลี่ยนเป็น

I.C. $\quad u(x, 0) = \sin\frac{3\pi x}{2} - 3\sin 4\pi x$

$\quad u_t(x, 0) = 0$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 3 คำตอบ $u(x, t)$ ซึ่งคล้องตาม B.C. และ $u_t(x, 0) = 0$ คือ

$$u(x, t) = A\sin\frac{n\pi x}{10}\cdot\cos\frac{n\pi t}{10}$$

$$u(x, 0) = A\sin\frac{n\pi x}{10} = \sin\frac{3\pi x}{2} - 3\sin 4\pi x$$

ดังนั้น ในการเลือก A และ n จะใช้คุณสมบัติ Principle of superposition ซึ่งจะได้ว่า

$$u(x, t) = A_1 \sin \frac{n_1 \pi x}{10} \cos \frac{n_1 \pi t}{10} + A_2 \sin \frac{n_2 \pi x}{10} \cos \frac{n_2 \pi t}{10}$$

ก็เป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้น $u(x, 0) = A_1 \sin \frac{n_1 \pi x}{10} + A_2 \sin \frac{n_2 \pi x}{10}$

$$= \sin \frac{3\pi x}{2} - 3 \sin 4\pi x$$

สมการเป็นจริงเมื่อ $A_1 = 1, \quad n_1 = 15$

และ $A_2 = -3, \quad n_2 = 40$

ดังนั้นคำตอบ $u(x, t) = \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi t}{2} - 3 \sin 4\pi x \cos 4\pi t$

วิธีการแยกตัวแปรนี้อาจขยายไปถึงฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวได้ เช่น

ตัวอย่างที่ 5 จงหาคำตอบของ

$$u_x - u_y + 3u_z = 0$$

วิธีทำ ให้คำตอบคือ $u(x, y, z) = X(x) Y(y) Z(z)$

แทนค่า $u(x, y, z)$ ในสมการที่กำหนดให้

$$X'YZ - XY'Z + 3XYZ' = 0$$

$$X'YZ = XY'Z - 3XYZ'$$

$$X'YZ = X(Y'Z - 3YZ')$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'Z - 3YZ'}{YZ}$$

จะหาคำตอบได้เมื่อ $\frac{X'}{X} = \lambda$ และ $\frac{Y'Z - 3YZ'}{YZ} = \lambda$, λ ค่าคงตัว

จะได้ $X' - \lambda X = 0$ ....(3.1.3)

และ $\frac{Y'Z - 3YZ'}{YZ} = \frac{Y'}{Y} - \frac{3Z'}{Z} = \lambda$

หรือ $\frac{Y'}{Y} = \lambda + \frac{3Z'}{Z}$ .... (3.1.4)

สมการ (3.1.4) เป็นจริงได้เมื่อ

$$\frac{Y'}{Y} = \lambda + \frac{3Z'}{Z} = \mu \text{ ค่าคงตัว}$$

จะได้ $$Y' - \mu Y = 0 \qquad \text{..........(3.1.5)}$$

และ $$Z' - \frac{(\mu - \lambda)}{3} Z = 0 \qquad \text{..........(3.1.6)}$$

สมการ (3.1.3) มีคำตอบเป็น $X(x) = c_1 e^{\lambda x}$

สมการ (3.1.5) มีคำตอบเป็น $Y(y) = c_2 e^{\mu y}$

สมการ (3.1.6) มีคำตอบเป็น $Z(z) = e_3 e^{(\mu - \lambda) z/3}$

ดังนั้นคำตอบ $u(x, y, z) = c e^{\lambda x} \cdot e^{\mu y} \cdot e^{(\mu - \lambda) z/3}$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

การหาคำตอบในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง (The method of eigenfunction expansions) เป็นอีกวิธีหนึ่งซึ่งใช้แก้ปัญหาขอบเขตชนิดเอกพันธ์ ซึ่งโดยวิธีนี้จะอาศัยวิธีการแยกตัวแปรก่อนแล้วเขียนคำตอบให้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ แล้วอาศัยคุณสมบัติของความเป็นออร์โทโกนัล (orthogonal) ของฟังก์ชัน หาคำตอบของสมการได้ ดังนั้นจะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันก่อนดังนี้

3.2 ความเป็นออร์โทโกนัล (Orthogonality)

นิยาม ฟังก์ชันค่าจริง $\varphi(x)$ และ $\psi(x)$ เรียกว่าเป็น**ออร์โทโกนัล** (orthogonal) ซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (weight function) $w(x)$ ในช่วง $[a, b]$ ถ้า

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, w(x)\, dx = 0$$

สำหรับลำดับอนันต์ (infinite sequence) ของฟังก์ชันค่าจริง $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ จะกล่าวว่าเป็น**ระบบออร์โทโกนัล** (orthogonal system) บน $[a, b]$ ซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, w(x)\, dx = 0 \text{ เมื่อ } m \neq n$$

และ $$\int_a^b \varphi_n^2(x)\, w(x)\, dx > 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

และจะกล่าวว่าเป็นระบบ**ออร์โทนอร์แมล** (orthonormal system) บน [a, b] ซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(x) ก็ต่อเมื่อ

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,w(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\sin x$ และ $\cos 2x$ เป็นออร์โทโกนัลซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักซึ่งมีค่า เท่ากับ 1 บนช่วง $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)(\cos 2x)(1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin (x-2x) + \sin (x+2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(\cos x)_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

$\therefore$ $\sin x$ และ $\cos 2x$ เป็นออร์โทโกนัล

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\varphi_m(x) = \sin mx,\ m = 1, 2, \ldots$ จงแสดงว่าลำดับอนันต์ $\{\varphi_m(x)\}$ เป็นระบบออร์โทโกนัลบน $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ เมื่อ $w(x) = 1$ และจงหาระบบออร์โทนอร์แมล

วิธีทำ $\because$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,w(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)\,x dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)\,x dx$$
$$= \frac{\sin(m-n)\,x}{2(m-n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\sin(m+n)\,x}{2(m+n)}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0$$

และ
$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos 2nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(\pi-(-\pi)) = \pi > 0$$

$\therefore$ $\{\varphi_m(x)\}$ เป็นระบบออร์โทโกนัลบน $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

และจะเห็นว่า

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^2(x)\, dx = 1$$

หรือ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1$$

ดังนั้นระบบออร์โทนอร์แมลบน $[-\pi, \pi]$ จะประกอบด้วย

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงว่าลำดับอนันต์ $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ เป็นระบบออร์โทโกนัลบน $[-\pi, \pi]$ เมื่อ $w(x) = 1$ และจงหาระบบออร์โทนอร์แมล

วิธีทำ $\because \int_{-\pi}^{\pi} 1.\sin mx\, dx = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1.\cos mx\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \ \forall\, m, n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

และ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi > 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi > 0$$

ดังนั้น $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ เป็นระบบออร์โทโกนัลบน $[-\pi, \pi]$ และระบบออร์โทนอร์แมลบน $[-\pi, \pi]$ จะประกอบด้วย

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

3.3 ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ (Sturm-Liouville's problem)

พิจารณาปัญหาขอบเขตชนิดหนึ่งซึ่งประกอบด้วย

1. สมการเชิงอนุพันธ์ชนิดเชิงเส้น

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + [\, q(x) + \lambda w(x)\,]\, \varphi = 0 \qquad \text{..........(3.3.1)}$$

เมื่อ $p(x), q(x), w(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งต่อเนื่องบน $[a, b]$ ซึ่ง $p(x)$ มีอนุพันธ์ซึ่งมีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ ด้วย และ $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ ทุก ๆ x ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b$, λ เป็นพารามิเตอร์ซึ่งไม่ขึ้นอยู่กับ x

2. เงื่อนไขขอบเขตคือ

$$\begin{aligned} A_1\, \varphi(a) + A_2\, \varphi'(a) &= 0 \\ B_1\, \varphi(b) + B_2\, \varphi'(b) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{..........(3.3.2)}$$

เมื่อ A_1, A_2, B_1, B_2 เป็นค่าคงตัว ซึ่ง A_1, A_2 ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและ B_1, B_2 ก็ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ปัญหาขอบเขตชนิดนี้เรียกว่า ปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ตัวอย่างที่ 1 สมการ $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$

เมื่อ $\varphi(0) = 0, \ \varphi(\pi) = 0$

เป็นปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ เพราะว่า

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = \frac{d}{dx}\left(1 \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) + [\, 0 + \lambda.1\,]\, \varphi = 0$$

ในที่นี้ $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$ และเงื่อนไขมี $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $B_1 = 1$ และ $B_2 = 0$ $x \in [0, \pi]$

ตัวอย่างที่ 2 ปัญหาขอบเขต

$$\frac{d}{dx}\left[2x\frac{d\varphi}{dx}\right] + [\, x^2 + 2\lambda x^3]\, \varphi = 0$$

$$2\,y(1)+5\,y'(1) = 0$$

$$3\,y(3)-4\,y'(3) = 0$$

เป็นปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ในที่นี้จะเห็นว่า $p(x) = 2x,\ q(x) = x^2\ w(x) = 2x^3$ และมีเงื่อนไขซึ่ง $A_1 = 2,\ A_2 = 5,\ B_1 = 3$ และ $B_2 = -4$ และ $1 \leqslant x \leqslant 3$

การหาคำตอบของปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์

การหาคำตอบของปัญหาชนิดนี้ ก็คือการหาฟังก์ชัน φ ซึ่งคล้องตามสมการ (3.3.1) และเงื่อนไข (3.3.2) คำตอบหนึ่งซึ่งเราไม่ต้องการหาคือ $\varphi(x) = 0$ ทุก ๆ x เพราะไม่มีประโยชน์ ดังนั้นจึงจะหาคำตอบซึ่ง $\varphi(x) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาคำตอบของปัญหาขอบเขต

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi = 0$$

เมื่อ $\varphi(0) = 0,\ \varphi(\ell) = 0$

วิธีทำ แบ่งพิจารณา λ เป็น 3 กรณีคือ $\lambda < 0,\ \lambda = 0,\ \lambda > 0$

กรณีที่ 1 ถ้า $\lambda = 0$

สมการคือ $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$

คำตอบทั่วไปคือ $\varphi(x) = c_1x+c_2$

$$\varphi(0) = c_2 = 0$$

$$\varphi(\ell) = c_1\ell = 0$$

$$c_1 = 0$$

$\therefore\ \varphi(x) = 0 \quad \forall\ x$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่มีประโยชน์

กรณีที่ 2 ถ้า $\lambda < 0$

สมการช่วยคือ $m^2+\lambda = 0$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

$\because \lambda < 0 \quad \therefore -\lambda > 0$

ให้ $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ **ซึ่งเป็นจำนวนจริง**

คำตอบทั่วไปคือ $\varphi(x) = c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}$

$\varphi(0) = c_1+c_2 = 0$

$\therefore c_1 = -c_2$

$\varphi(\ell) = c_1e^{\alpha\ell}+c_2e^{-\alpha\ell} = 0$

แทนค่า c_1 ; $c_2(-e^{-\alpha\ell}+e^{-\alpha\ell}) = 0$

แต่ $c_2 \neq 0$ (ถ้า $c_2 = 0$ จะได้ $c_1 = 0$ และคำตอบ $\varphi(x) = 0 \forall x$)

$\therefore -e^{\alpha\ell}+e^{-\alpha\ell} = 0$

$e^{\alpha\ell} = e^{-\alpha\ell}$

$e^{2\alpha\ell} = 1$

$\therefore \alpha = 0$

นั่นคือ $\lambda = 0$

แต่กรณีนี้พิจารณา $\lambda < 0$ เท่านั้น

ดังนั้นกรณี $\lambda < 0$ ใช้ไม่ได้

กรณีที่ 3 ถ้า $\lambda > 0$

สมการช่วยคือ $m^2+\lambda = 0$

$$m = \pm\sqrt{\lambda}\, i$$

คำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$$\varphi(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$\varphi(0) = c_2 = 0$$

$$\varphi(\ell) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0$$

แต่ $c_1 \neq 0 \therefore \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0 = \sin n\pi$

$$\sqrt{\lambda}\ell = n\pi$$

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots$$

คำตอบคือ $\varphi(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, n = 1, 2, \ldots\ldots$

ซึ่งเป็น nontrivial solution

นิยาม ค่าพารามิเตอร์ λ ซึ่งทำให้คำตอบของปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์หาคำตอบได้ซึ่งไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **ค่าเจาะจง** (eigenvalues หรือ characteristic values) และฟังก์ชันซึ่งเป็นคำตอบ เรียกว่า **ฟังก์ชันเจาะจง** (eigenfunctions หรือ characteristic functions)

จากตัวอย่างจะเห็นว่า

ค่าเจาะจง คือ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$

และ ฟังก์ชันเจาะจง คือ $c_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าเจาะจง และ ฟังก์ชันเจาะจงของสมการ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0 \quad , 0 < x < \pi$$

$$\varphi(0) - \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi(\pi) - \varphi'(\pi) = 0$$

วิธีทำ ถ้า $\lambda = 0$

สมการคือ $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$

$$\varphi(x) = c_1x + c_2$$

$$\varphi(0) - \varphi'(0) = c_2 - c_1 = 0$$

$$\varphi(\pi) - \varphi'(\pi) = c_1\pi + c_2 - c_1 = 0$$

$$\therefore c_1\pi = 0$$

$$c_1 = 0$$

และ $c_2 = 0$

$\therefore \varphi(x) = 0$ ทุก x

ถ้า $\lambda < 0$ สมการช่วยคือ $m^2+\lambda = 0$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda}$$

ให้ $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ เป็นจำนวนจริงซึ่งมากกว่าศูนย์

คำตอบทั่วไปคือ $\varphi(x) = c_1e^{\alpha x}+c_2e^{-\alpha x}$

$$\varphi'(x) = \alpha c_1e^{\alpha x}-\alpha c_2e^{-\alpha x}$$

$$\varphi(0)-\varphi'(0) = c_1+c_2-(\alpha c_1-\alpha c_2)$$

$$= (1-\alpha)c_1+(1+\alpha)c_2$$

$$\varphi(\pi)-\varphi'(\pi) = c_1e^{\alpha\pi}+c_2e^{-\alpha\pi}-(\alpha c_1e^{\alpha\pi}-\alpha c_2e^{-\alpha\pi})$$

$$= (1-\alpha)c_1e^{\alpha\pi}+(1+\alpha)c_2e^{-\alpha\pi}$$

$\therefore (1-\alpha)c_1+(1+\alpha)c_2 = 0$

$(1-\alpha)c_1e^{\alpha\pi}+(1+\alpha)c_2e^{-\alpha\pi} = 0$

แก้สมการทั้งสองจะได้ $c_2(-(1+\alpha)e^{\alpha\pi}+(1+\alpha)e^{-\alpha\pi}) = 0$

$$\therefore (1+\alpha)e^{\alpha\pi} = (1+\alpha)e^{-\alpha\pi}$$

$$\overset{2\alpha\pi}{e} = 0 \quad (\alpha \neq -1)$$

$\therefore \alpha = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $\lambda > 0$ สมการช่วยคือ $m^2+\lambda = 0$

$$m = \pm\sqrt{\lambda}\, i$$

คำตอบทั่วไปของสมการ คือ

$$\varphi(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x+c_2\cos\sqrt{\lambda}\, x$$

$$\varphi'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\, x-c_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, x$$

เงื่อนไข $\varphi(0)-\varphi'(0) = c_2-c_1\sqrt{\lambda} = 0$

$$\varphi(\pi)-\varphi'(\pi) = c_1(\sin\sqrt{\lambda}\,\pi-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,\pi)+c_2(\cos\sqrt{\lambda}\,\pi+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

แก้สมการทั้งสองจะได้ $c_1(1+\lambda)\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$

แต่ $c_1 \neq 0$ และ $\lambda \neq -1$

$$\therefore \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 = \sin n\pi$$

$$\sqrt{\lambda} = n \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\lambda_n = n^2$$

$\therefore$ ค่าเจาะจง คือ $\lambda_n = n^2 \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$

ฟังก์ชันเจาะจง คือ $c_n(\sin nx + n\cos nx)$

ความเป็นออร์โทโกนัลของฟังก์ชันเจาะจง

3.3.1 ทฤษฎีบท ถ้า λ_m, λ_n เป็นค่าเจาะจงซึ่ง $\lambda_m \neq \lambda_n$ และ φ_m, φ_n เป็นฟังก์ชันเจาะจงของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์ จะได้ว่า φ_m และ φ_n เป็นออร์โทโกนัลฟังก์ชันซึ่งสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)$

พิสูจน์ เพราะว่า λ_m, λ_n เป็นค่าเจาะจง และ φ_m, φ_n เป็นฟังก์ชันเจาะจงของปัญหาสตูร์ม-ลีอูวิลล์

ดังนั้น $$\frac{d}{dx}[p(x)\,\varphi_m'(x)] + [q(x) + \lambda_m w(x)]\,\varphi_m(x) = 0 \qquad \ldots\ldots (3.3.3)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,\varphi_n'(x)] + [q(x) + \lambda_n w(x)]\varphi_n(x) = 0 \qquad \ldots\ldots (3.3.4)$$

สำหรับทุก x ซึ่ง $a \leqslant x \leqslant b$

คูณสมการ (3.3.3) ด้วย $\varphi_n(x)$ และคูณสมการ (3.3.4) ด้วย $\varphi_m(x)$

แล้วเอามาลบกันจะได้

$$\varphi_n(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_m'(x)] + \lambda_m\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,w(x) - \varphi_m(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_n'(x)]$$

$$-\lambda_n\varphi_m(x)\varphi_n(x)\,w(x) = 0$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\varphi_m(x)\varphi_n(x)\ w(x) = \varphi_m(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_n'(x)] - \varphi_n(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_m'(x)]$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\ w(x)\ dx = \int_a^b \varphi_m(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_n'(x)]\ dx$$

$$-\int_a^b \varphi_n(x)\frac{d}{dx}[p(x)\varphi_m'(x)]\ dx$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by part) เทอมทางขวามือจะได้เท่ากับ

$$[p(x)\,[\varphi_m(x)\varphi_n'(x) - \varphi_n(x)\varphi_m'(x)]\ \Big|_a^b$$

$$\therefore\ (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\ w(x)\ dx = p(b)\,[\varphi_m(b)\varphi_n'(b) - \varphi_n(b)\varphi_m'(b)]$$

$$-p(a)\,[\varphi_m(a)\varphi_n'(a) - \varphi_n(a)\varphi_m'(a)] \qquad \ldots\ldots.\ (3.3.5)$$

จากสมการเงื่อนไขขอบเขต (3.3.2)

ถ้า $A_2 = B_2 = 0$

$\therefore\ \varphi_m(a) = 0,\ \varphi_m(b) = 0$

และ $\varphi_n(a) = 0,\ \varphi_n(b) = 0$

$$\therefore\ (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\ w(x)\ dx = 0$$

ถ้า $A_2 = 0,\ B_2 \neq 0$

$\therefore\ \varphi_m(a) = 0 = \varphi_n(a)$

$\therefore$ วงเล็บหลังของเทอมทางขวามือของสมการ (3.3.5) เป็นศูนย์

แต่ $C\ \varphi_m(b) + \varphi_m'(b) = 0$

และ $C\ \varphi_n(b) + \varphi_n'(b) = 0$ เมื่อ $C = \frac{B_1}{B_2}$

$$\text{แต่ } [\varphi_m(b)\varphi_n'(b) - \varphi_n(b)\varphi_m'(b)] = [C\ \varphi_n(b) + \varphi_n'(b)]\varphi_m(b) - [(\varphi_m(b) + \varphi_m'(b)]\varphi_n(b)$$

$$= 0$$

$$\therefore\ (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, w(x)dx = 0$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณี $A_2 \neq 0, B_2 = 0$ หรือ $A_2 \neq 0, B_2 \neq 0$ ก็จะสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันว่า

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, w(x)\, dx = 0$$

$$\because\ \lambda_m \neq \lambda_n$$

$$\therefore\ \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\, w(x)\, dx = 0$$

ดังนั้น $\varphi_m(x)$ และ $\varphi_n(x)$ เป็นออร์โทโกนัลฟังก์ชันซึ่งสัมพันธ์กับ $w(x)$ บน $a \leqslant x \leqslant b$

3.4 การหาคำตอบโดยวิธีกระจายในเทอมของฟังก์ชันเจาะจง

(The method of eigenfunction expansions)

วิธีหาคำตอบของปัญหาขอบเขตโดยวิธีนี้ จะอาศัยคุณสมบัติความเป็นออร์โทโกนัลของฟังก์ชันเจาะจง และหาคำตอบในรูปอนุกรมดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 จากสมการความร้อน

D.E $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $t > 0,\ 0 < x < L$

B.C $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x)$, $o < x < L$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้ $u(x, t) = T(t)\,\varphi(x)$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการ D.E แล้วจัดสมการใหม่ ดังนั้นจะได้

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\varphi(x)}\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

สมการจะหาคำตอบได้ เมื่อเท่ากับค่าคงที่ซึ่งน้อยกว่าศูนย์ ในที่นี้ให้ $= -\lambda$ เมื่อ $\lambda > 0$

$$\frac{dT}{dt} + \lambda kT = 0 \qquad \text{....... (3.4.1)}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0 \qquad \text{...... (3.4.2)}$$

สมการ (3.4.1) มีคำตอบเป็น $T(t) = c_1e^{-\lambda kt}$

จาก B.C $\quad u(0, t) = T(t)\varphi(0) = 0$

$$\therefore \varphi(0) = 0$$

$$u(L, t) = T(t)\,\varphi(L) = 0$$

$$\therefore \varphi(L) = 0$$

ดังนั้นสมการ (3.4.2) ซึ่งคล้องตามเงื่อนไข $\varphi(0) = 0$ และ $\varphi(L) = 0$ เป็นปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ซึ่งคำตอบทั่วไปคือ

$$\varphi(x) = c_2 \cos x\sqrt{\lambda} + c_3 \sin x\sqrt{\lambda}$$

$$\varphi(0) = c_2 = 0$$

$$\therefore \varphi(x) = c_3 \sin x\sqrt{\lambda}$$

$$\varphi(L) = c_3 \sin L\sqrt{\lambda} = 0$$

แต่ $c_3 \neq 0$

$$\therefore \sin L\sqrt{\lambda} = 0$$

$$L\sqrt{\lambda} = n\pi$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots\ldots.$$

ค่าเจาะจง $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

และ ฟังก์ชั่นเจาะจง คือ $\varphi_n(x) = c_n \sin x\sqrt{\lambda_n}$

$$u_n(x, t) = T_n(t)\,\varphi_n(x)$$

$$= B_n e^{-\lambda_n kt} \sin x\sqrt{\lambda_n}$$

เมื่อ $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, n = 1, 2, ...

จากคำตอบ $u_n(x, t) = B_n e^{-\lambda_n kt} \sin x\sqrt{\lambda_n}$ n = 1, 2, ...

ซึ่งหาได้จาก D.E และคล้องตาม B.C

$$\therefore \; u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x, t)$$

ก็เป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้น
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(B_n e^{-\lambda_n kt} \sin x\sqrt{\lambda_n})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n kt} \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{....... (3.4.3)}$$

จาก I.C $\quad u_n(x, 0) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\therefore \; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad \text{.......(3.4.4)}$$

ในที่นี้ต้องการหา b_n ซึ่งจะใช้คุณสมบัติความเป็นออร์โทโกนัล

จะเห็นว่า $\sin \frac{n\pi x}{L}$, n = 1, 2, ... เป็นระบบอร์โทโกนัลบน [0, L]

เพราะ $\int_0^L \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0$ เมื่อ $m \neq n$

และ $\int_0^L \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \right)^2 dx = \frac{L}{2}$ n = 1, 2, ...

คูณสมการ (3.4.4) ด้วย $\sin \frac{m\pi x}{L}$ แล้วอินทิเกรตแต่ละเทอม จาก 0 ถึง L

$$\int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

เทอมทางขวามือของสมการนี้จะเป็นศูนย์ทุกเทอมยกเว้นเทอมที่ $n = m$

$$\therefore \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \int_0^L \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx$$

$$= b_m \cdot \frac{L}{2}$$

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

$$\therefore b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \qquad \text{....... (3.4.5)}$$

อนุกรม $u(x, t)$ จาก (3.4.3) ซึ่งหาค่า b_n ได้จาก (3.4.5) เรียกว่าเป็นการกระจายในเทอมของฟังก์ชันเจาะจงของ $f(x)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ปัญหาขอบเขตของ

D.E $\quad u_t = ku_{xx} \qquad , t > 0, 0 < x < L$

B.C $\quad u_x(0, t) = 0$

$\qquad u_x(L, t) = 0 \qquad , t > 0$

I.C $\quad u(x, 0) = f(x) \qquad , 0 < x < L$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้ $u(x, t) = T(t)\,\varphi(x)$

จะได้สมการ $\quad \dfrac{dT}{dt} + \lambda k T = 0 \qquad , t > 0$

และ $\quad \dfrac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0 \qquad , 0 < x < L$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัวซึ่ง $\lambda > 0$

คำตอบทั่วไปคือ $\quad T(t) = c_1 e^{-\lambda k t}$

$\qquad \varphi(x) = c_2 \cos x\sqrt{\lambda} + c_3 \sin x\sqrt{\lambda}$

จากเงื่อนไข $\quad u_x(0, t) = T(t)\,\varphi'(0) = 0 \quad$ จะได้ $\varphi'(0) = 0$

$$u_x(L, t) = T(t)\,\varphi'(L) = 0 \quad \text{จะได้ } \varphi'(L) = 0$$

$$\varphi'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin x\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\, c_3 \cos x\sqrt{\lambda}$$

$$\varphi'(0) = c_3 = 0$$

$$\varphi'(L) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin L\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\therefore \sin L\sqrt{\lambda} = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

$\therefore$ ฟังก์ชันเจาะจง คือ $\varphi_n(x) = c_n \cos x\sqrt{\lambda_n}$

$$u_n(x, t) = T_n(t)\,\varphi_n(x)$$

$$= B_n e^{-\lambda_n kt}\cos x\sqrt{\lambda_n}$$

เมื่อ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

$$\therefore u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(t)\,\varphi_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n kt}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$u(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi x}{L} \qquad \ldots\ldots (3.4.6)$$

เนื่องจาก $\int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$ ถ้า $m \neq n$

$$\int_0^L \left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx = \begin{cases} L & \text{ถ้า } n = 0 \\ \frac{L}{2} & \text{ถ้า } n \neq 0 \end{cases}$$

ในการหา A_0

อินทิเกรตสมการ (3.4.6) จาก 0 ถึง L

$$\int_0^L f(x)\,dx = \int_0^L A_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

แต่ $\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$

$$\therefore \int_0^L f(x)\,dx = A_0.L$$

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

ในการหา A_n

คูณสมการ (3.4.6) ด้วย $\cos\frac{m\pi x}{L}$ แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง L

จะได้ $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n \neq 0$

ซึ่งจะเห็นว่า A_0 และ A_n, $n \neq 0$ ต่างกันที่ $\frac{1}{L}$ และ $\frac{2}{L}$

ดังนั้นจะเขียน $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$

เมื่อ $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

ดังนั้น $u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n kt}\cos\frac{n\pi x}{L}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของปัญหาของเขตของสมการคลื่น

D.E. $u_{tt} = c^2 u_{xx}\ ,\ 0 < x < L\ ,\ t > 0$

B.C. $u(0,t) = 0,\ u(L,t) = 0,\ t > 0$

I.C. $u(x,0) = f(x),$

$u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < t$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้ $u(x,t) = T(t)\,\varphi(x)$

จะได้สมการ

$$\frac{d^2T}{dt^2} + c^2\lambda T = 0$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงที่ ซึ่ง $\lambda > 0$

คำตอบทั่วไปคือ $T(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda}\, t$

$$\varphi(x) = c_3 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_4 \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

จากเงื่อนไข $u(0, t) = 0$ จะได้ $\varphi(0) = 0$

และ $u(L, t) = 0$ จะได้ $\varphi(L) = 0$

$$\varphi(0) = c_3 = 0$$

$$\varphi(L) = c_4 \sin \sqrt{\lambda}\, L = 0$$

$$\therefore \sin \sqrt{\lambda}\, L = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda_u = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$u_n(x, t) = T_n(t)\, \varphi_n(x)$$

$$= \sin \frac{n\pi x}{L} \left[a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L}\right]$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \ldots\ldots (3.4.7)$$

จาก I.C $u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

เนื่องจาก $\sin \frac{n\pi x}{L}$ เป็นระบบออร์โทโกนัล จาก 0 ถึง L ดังนั้น

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \ldots\ldots (3.4.8)$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ดังนั้น $\frac{n\pi c}{L} B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx$

หรือ $$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad \ldots\ldots (3.4.9)$$

คำตอบของสมการคือ (3.4.7) โดยที่ A_n และ B_n หาค่าได้จาก (3.4.8) และ (3.4.9) ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้ปัญหาขอบเขตของสมการลาปลาซ

D.E $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $0 < x < a, 0 < y < b$

B.C $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$, $0 < y < b$

$u(x, 0) = 0$, $u(x, b) = f(x)$, $0 < x < a$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้ $u(x, y) = X(x)\, Y(y)$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$Y'' - \lambda Y = 0$$

ซึ่งมีคำตอบทั่วไปคือ $X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\, x + B\sin\sqrt{\lambda}\, x$

$Y(y) = C\cosh\sqrt{\lambda}\, y + D\sinh\sqrt{\lambda}\, y$

จาก B.C $u(0, y) = 0 \therefore X(0) = 0 = A$

$u(a, y) = 0$, $X(a) = 0$

$u(x, 0) = 0$, $Y(0) = 0 = C$

$X(a) = B\sin\sqrt{\lambda}\, a = 0$

$\sqrt{\lambda}\, a = n\pi$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \ n = 1, 2, \ldots.$$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$Y_n(y) = D_n \sin h \frac{n\pi y}{a}$$

$$u_n(x, y) = X_n(x)\, y_n(y)$$

$$= b_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sin h \frac{n\pi y}{a}$$

$$u(x, y) = \sum_{h=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi r}{a} \sin h \frac{n\pi y}{a}$$

$$u(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin h \frac{n\pi b}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$\because$ $\sin \frac{n\pi x}{a}$ เป็นออร์โทโกนับฟังก์ชันจาก 0 ถึง a

$\therefore$ $b_n \sin h \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$

$$b_n = \frac{2}{a \sin h \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

3.5 สูตรของกรีน (Green's formula)

ในการศึกษาสูตรของกรีนเพื่อจะนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาค่าเจาะจง (eigen-value problems) และปัญหาการหาคำตอบในเทอมของฟังก์ชันเจาะจงให้กว้างขวางขึ้น โดยอาศัยสูตรของกรีนจะทำให้คุณสมบัติที่สำคัญ ๆ ของค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจง

นิยาม ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสอง มีความต่อเนื่องบน $a \leqslant x \leqslant b$ และ

$$f''g - fg'' = \frac{d}{dx}(f'g - fg') \qquad \ldots\ldots\ldots.(3.5.1)$$

ดังนั้น $$\int_a^b [\, f''(x)\, g(x) - f(x)\, g''(x)\,]\, dx = [\, f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)\,]_{x=a}^{x=b} \ldots\ldots\ldots.(3.5.2)$$

ถ้าให้ A เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นซึ่ง $Af = -f''$ ดังนั้น (3.5.2) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\int_a^b [\,(Af)\,g - f(Ag)\,]\,dx = -[\,f'g - fg'\,]_a^b \qquad \text{..........(3.5.3)}$$

เรียกสมการ (3.5.3) ว่าสูตรของกรีนสำหรับตัวดำเนินการ A บนช่วง [a, b] หรือเรียกสั้น ๆ ว่า**สูตรของกรีน**

คุณสมบัติของตัวดำเนินการ A

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex-valued function) ซึ่ง

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x)$$

เมื่อ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

ให้ $$\bar{f}(x) = f_1(x) - if_2(x)$$

ถ้า f_1 และ f_2 มีอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอนุพันธ์อันดับสองซึ่งต่อเนื่องจะได้

$$A\bar{f} = \overline{Af}$$

พิสูจน์ $Af = -f''(x) = -(f_1''(x) + if_2''(x)) = -f_1''(x) - if_2''(x)$

$$A\bar{f} = -\bar{f}'' = -[\,f''(x) - if_2''(x)\,] = -f_1''(x) + if_2''(x) = A\bar{f}$$

$$\therefore \quad A\bar{f} = \overline{Af}$$

พิจารณาปัญหาค่าเจาะจงซึ่งมีสมการเป็น

$$A\varphi = \lambda\varphi \qquad \text{..........(3.5.4)}$$

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(L) = 0$$

โดยใช้สูตรของกรีนจะพิสูจน์ได้ว่า

1. ค่าเจาะจงของปัญหา (3.5.4) เป็นค่าจริง
2. ฟังก์ชันเจาะจงมีคุณสมบัติออร์โทโกนัล

พิสูจน์ (1) ถ้า λ เป็นค่าเจาะจงซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมี ฟังก์ชันเจาะจงเป็น φ ดังนั้น $\bar{\lambda}$ ก็เป็นค่าเจาะจงซึ่งมี $\bar{\varphi}$ เป็นฟังก์ชันเจาะจงเพราะว่า

$$A\bar{\varphi} = \overline{A\varphi} = \overline{\lambda\varphi} = \bar{\lambda}\bar{\varphi}$$

$$\bar{\varphi}(0) = \overline{\varphi(0)} = 0$$

$$\bar{\varphi}(L) = \overline{\varphi(L)} = 0$$

ดังนั้น $\bar{\lambda}$ เป็นค่าเจาะจงและ $\bar{\varphi}$ เป็นฟังก์ชันเจาะจง

โดยสูตรของกรีน

$$\int_0^L [(A\varphi)\,\bar\varphi - \varphi(A\bar\varphi)]\,dx = -[\varphi'(x)\,\bar\varphi(x) - \bar\varphi'(x)\,\varphi(x)]_0^L$$

$$= -[\varphi'(L)\,\bar\varphi(L) - \bar\varphi'(L)\,\varphi(L)] + [\varphi'(0)\,\bar\varphi(0) - \bar\varphi'(0)\,\varphi(0)] = 0$$

แต่ $\int_0^L [(A\varphi)\,\bar\varphi - \varphi(A\bar\varphi)] = \int_0^L [(\lambda\varphi)\,\bar\varphi - \varphi(\bar\lambda\bar\varphi)]\,dx$

$$= \int_0^L [\lambda(\varphi\bar\varphi) - \bar\lambda\,(\varphi\bar\varphi)]\,dx$$

$$= \int_0^L (\lambda - \bar\lambda)\,\varphi\bar\varphi\,dx$$

$$= (\lambda - \bar\lambda)\int_0^L |\varphi(x)|^2\,dx = 0$$

แต่ $\varphi(x) \neq 0$ บน : $\leqslant x < L$

$$\therefore \quad \int_0^L |\varphi(x)|^2\,dx \neq 0$$

$$\lambda - \bar\lambda = 0$$

$$\lambda = \bar\lambda$$

ดังนั้น λ เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์ (2) ให้ φ_i และ φ_j เป็นฟังก์ชันค่าเจาะจงของค่าเจาะจง λ_i, λ_j ซึ่ง $\lambda_i \neq \lambda_j$ ทุก i, j ตามลำดับ

ดังนั้น $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ และ $A\varphi_i = \lambda_j\varphi_j$

$$\int_0^L (A\varphi_i)\,\varphi_j - \varphi_i(A\varphi_j)]\,dx = (\lambda_i - \lambda_j)\int_0^L \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx$$

$$= -[\varphi_i'(x)\,\varphi_j(x) - \varphi_j'(x)\,\varphi_i(x)]_0^L$$

$$= 0$$

$$\therefore\ (\lambda_i - \lambda_j)\int_0^L \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0$$

แต่ $\lambda_i \neq \lambda_j$ ดังนั้น

$$\int_0^L \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx = 0$$

ดังนั้น ฟังก์ชันค่าเจาะจงมีคุณสมบัติออร์โทโกนัล

3.6 การประยุกต์สูตรของกรีน

ถ้า $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

เมื่อ $\varphi_n(x)$ เป็นฟังก์ชันเจาะจงของ $\frac{d^2x}{dx^2} + \lambda\varphi = 0, \ 0 < x < L$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

ดังนั้น $f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots$ ....(3.6.1)

ในการหา a_n คูณสมการ (3.6.1) ด้วย $\varphi_n(x)$ แล้วอินทิเกรตจาก 0 ถึง L

$$\int_0^L f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = a_1\int_0^L \varphi_1(x)\,\varphi_n(x)\,dx + a_2\int_0^L \varphi_2(x)\,\varphi_n(x)\,dx$$

$$+ \ldots + a_n\int_0^L [\,\varphi_n(x)\,]^2\,dx + \ldots$$

$$= a_n\int_0^L [\,\varphi_n(x)\,]^2\,dx$$

จะได้ $$a_n = \frac{\int_0^L f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int_0^L [\,\varphi_n(x)\,]^2\,dx}$$

นิยาม ถ้า $\{\varphi_n(x)\}$ เป็นระบบออร์โทโกนัลของฟังก์ชันบน $[0, L]$ จะเรียก $\int_0^L [\,\varphi_n(x)\,]^2\,dx$

ว่า normalizing constants สำหรับระบบออร์โทโกนัล

ตัวอย่าง ถ้า $\varphi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$, $[0, L]$ จงหา $\int_0^L [\,\varphi_n(x)\,]^2\,dx$ โดยใช้สูตรของกรีน

วิธีทำ จากการหาฟังก์ชันค่าเจาะจงจะพบว่า

$\varphi(x, \lambda) = \sin x\sqrt{\lambda}$ เป็นฟังก์ชันค่าเจาะจงของ

ปัญหา $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

เมื่อ $\varphi(0) = 0, \ \varphi(L) = 0$

พิจารณาจากสมการของกรีน

$$(\mu - \lambda)\int_0^L \varphi(x, \lambda)\,\varphi(x, \mu)\,dx = \int_0^L [\,\varphi''(x, \lambda)\,\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \lambda), \ \varphi''(x, \mu)\,]\,dx$$

$$= \left[\varphi'(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu) - \varphi(x,\lambda)\,\varphi'(x,\mu) \right]_0^L$$

แต่ $\varphi(0, \lambda) = \varphi(0\,\mu) = 0$

ดังนั้น $\int_0^L \varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx = \dfrac{\varphi'(L,\lambda)\,\varphi(L,\mu) - \varphi'(L,\mu)\,\varphi(L,\lambda)}{\mu-\lambda}$ ถ้า $\mu \neq \lambda$

ในที่นี้ μ และ λ เป็นค่าซึ่ง $\mu \neq \lambda$ แต่อาจจะไม่เป็นค่าเจาะจงก็ได้

แต่ $$\lim_{\mu \to \lambda} \varphi(x,\mu) = \varphi(x,\lambda)$$

$$\lim_{\mu \to \lambda} \int_0^L \varphi(x,\lambda)\,\varphi(x,\mu)\,dx = \int_0^L [\,\varphi(x,\lambda)\,]^2\,dx$$

$$\therefore \int_0^L [\varphi(x,\lambda)]^2\,dx = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{\varphi'(L,\lambda)\,\varphi(L,\mu) - \varphi(L,\lambda)\,\varphi'(L,\mu)}{\mu-\lambda}$$

$$= \varphi'(L,\lambda)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(L,\lambda) - \varphi(L,\lambda)\,\frac{\partial\varphi'}{\varphi\lambda}(L,\lambda)$$

แต่ $\lambda = \lambda_n$ และ $\varphi(L, \lambda_n) = 0$

ดังนั้น $\int_0^L [\,\varphi(x,\lambda_n)\,]^2\,dx = \varphi'(L,\lambda_n)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(L,\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_n}$

ในที่นี้ $$\varphi(x,\lambda) = \sin x\sqrt{\lambda}$$

$$\varphi'(x,\lambda) = \sqrt{\lambda}\cos x\sqrt{\lambda}$$

$$\varphi'(L,\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n}\cos L\sqrt{\lambda_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(L,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\sin L\sqrt{\lambda} = \frac{1}{2}L\lambda^{-1/2}\cos L\sqrt{\lambda}$$

ดังนั้น $\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(L,\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_n} = \dfrac{L}{2\sqrt{\lambda_n}}\cos L\sqrt{\lambda_n}$

$$\int_0^L [\,\varphi(x,\lambda_n)\,]^2\,dx = \frac{L}{2}\cos^2 L\sqrt{\lambda_n}\,,\quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

ซึ่งจะมีค่าเท่ากับการคำนวณโดยตรง

3.7 ปัญหาขอบเขตซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตแบบผสม

พิจารณาสมการความร้อนซึ่งไหลบนเส้นลวดหุ้มฉนวน ซึ่งโค้งเป็นรูปวงกลม ถ้าความยาวของเส้นลวดเท่ากับ 2L, x เป็นระยะซึ่งวัดตามเส้นลวด ถ้าปัญหาขอบเขตเขียนได้เป็น

D.E. $\quad u_t = ku_{xx}, \quad -L < x < L, \; t > 0$

B.C. $\quad \left.\begin{aligned} u(-L, t) &= u(L, t) \\ ku_x(-L, t) &= ku_x(L, t) \end{aligned}\right\} , \; t > 0$

I.C. $\quad u(x, 0) = f(x), \quad -L < x < L$

โดยการแยกตัวแปร $u(x, t) = T(t)\,\varphi(x)$

จะได้

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad -L < x < L \qquad \ldots\ldots (3.7.1)$$

$$\varphi(-L) - \varphi(L) = 0$$

$$\varphi'(-L) - \varphi'(L) = 0$$

ซึ่งมีคำตอบทั่วไปคือ $\varphi(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$ จาก B.C. จะได้

$$[A\cos(-L\sqrt{\lambda}) + B\sin(-L\sqrt{\lambda})] - [A\cos L\sqrt{\lambda} + B\sin L\sqrt{\lambda}] = 0$$

หรือ

$$0A - 2B\sin L\sqrt{\lambda} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.7.2)$$

และ $[-A\sqrt{\lambda}\sin(-L\sqrt{\lambda}) + B\sqrt{\lambda}\cos(-L\sqrt{\lambda})] - [-A\sqrt{\lambda}\sin L\sqrt{\lambda} + B\sqrt{\lambda}\cos L\sqrt{\lambda}] = 0$

$$2A\sqrt{\lambda}(\sin L\sqrt{\lambda}) + 0B = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.7.3)$$

λ จะเป็นค่าเจาะจงของ (3.7.1) ถ้าสามารถหา A และ B ได้ซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกันซึ่งคล้องตาม (3.7.2) และ (3.7.3)

แต่สมการ (3.7.2) และ (3.7.3) จะหา A, B ได้ซึ่งไม่เป็นศูนย์เมื่อค่าดีเทอร์มิแนนท์ของสัมประสิทธิ์เป็นศูนย์ดังนั้น

$$\begin{vmatrix} 0 & -2\sin L\sqrt{\lambda} \\ 2\sqrt{\lambda}\sin L\sqrt{\lambda} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$4\sqrt{\lambda}(\sin L\sqrt{\lambda})^2 = 0$$

$$\sin L\sqrt{\lambda} = 0$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น ค่าเจาะจงคือ $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

และฟังก์ชันเจาะจงคือ $\varphi_m(x) = A\cos\frac{n\pi x}{L} + B\sin\frac{n\pi x}{L}$

ซึ่งมี normalizing constants เป็น

$$\int_{-L}^{L} \varphi_0^2(x)\,dx = \int_{L}^{L} dx = 2L$$

$$\int_{-L}^{L} [\cos\frac{n\pi x}{L}]^2\,dx = \int_{-L}^{L} [\sin\frac{n\pi x}{L}]^2\,dx = L$$

คำตอบ $u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n kt}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$

ซึ่ง a_n และ b_n หาได้จากความเป็นออร์โทโกนัลของ $\cos\frac{n\pi x}{L}$ และ $\sin\frac{n\pi x}{L}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, \ldots$$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงใช้วิธีการแยกตัวแปรหาคำตอบของปัญหาต่อไปนี้

    1.1 $u_x = 3u_y$, $u(0, y) = 5e^{-2y}$

    1.2 $u_x + u_y = u$, $u(0, y) = 3e^{-y} + 4e^{-2y}$

    1.3 $u_x = 2u_y + u$, $u(x, 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

    1.4 $u_t = 4u_{xx}$, $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 2 \sin 3x$

    1.5 $u_t = u_{xx}$, $u_x(0, t) = 0$, $u(2, t) = 0$, $u(x, 0) = 8 \cos \frac{3\pi x}{3}$

    1.6 $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0, t) = 0$, $u(5, t) = 0$, $u(x, 0) = 0$,

    $u_t(x, 0) = 5 \sin \frac{3\pi x}{2}$

    1.7 $9u_{tt} = u_{xx}$, $u(0, t) = 0$, $u(10, t) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$,

    $u(x, 0) = 10 \sin \pi x$

2. จงแสดงว่า $\left\{ \frac{1}{\sqrt{c}}, \sqrt{\frac{2}{c}} \cos \frac{n\pi x}{c} \right\}$ ออร์โทนอร์แมลบน (0, c)

3. จงแสดงว่า $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2c}}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cos \frac{m\pi x}{c}, \frac{1}{\sqrt{c}} \sin \frac{n\pi x}{c} \right\}$ (m, n = 1, 2, ...)

    ออร์โทนอร์แมลบน $(-c, c)$

4. จงแสดงว่า $f(x) = 1$ และ $g(x) = x$ เป็นออร์โทโกนัลบนช่วง $(-1, 1)$ และจงหาค่า A, B ของฟังก์ชัน $h(x), = 1 + Ax + Bx^2$ ซึ่งทำให้ $h(x)$ ออร์โทโกนัลกับ $f(x)$ และ $g(x)$ บนช่วง $(-1, 1)$

5. จงหาค่าเจาะจงและฟังก์ชันเจาะจงของปัญหาของสตูร์ม-ลีอูวิลล์ ดังนี้

    5.1 $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi(0) = 0$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

    5.2 $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(c) = 0$

5.3 $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi'(0) = 0, \varphi(c) = 0$

5.4 $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi'(-\pi) = 0, \varphi'(\pi) = 0$

5.5 $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi(-c) = \varphi(c), \varphi'(-c) = \varphi'(c)$

5.6 $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\lambda\varphi = 0$ เมื่อ $\varphi(0) = 0, \varphi(\pi)-\varphi'(\pi) = 0$

6. จงแก้ปัญหาขอบเขต

6.1 D.E $u_t = ku_{xx}, 0 < x < 10, t > 0$

B.C $u(0, t) = 0, u(10, t) = 0, t > 0$

I.C $u(x, 0) = x+1, 0 < x < 10$

6.2 D.E $u_t = 2u_{xx}, 0 < x < 4, t > 0$

B.C $u(0, t) = u(4, t) = 0, t > 0$

I.C $u(x, 0) = 25x, 0 < x < 4$

6.3 D.E $u_t = ku_{xx}, 0 < x < 5, t > 0$

B.C $u_x(0, t) = 0, u_x(5, t) = 0, t > 0$

I.C $u(x, 0) = 20, 0 < x < 5$

6.4 D.E $u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0$

B.C $u(0, t) = 0 = u(1, t), t > 0$

I.C $u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = \cos n\pi x, 0 < x < 1$

6.5 D.E $u_{xx}+u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b$

B.C $u(0, y) = 0$

$u(a, y) = 0$ $\quad , 0 < y < b$

$u(x, 0) = f(x)$

$u(x, b) = 0$ $\quad , 0 < x < a$

6.6 D.E $u_{xx}+u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b$

B.C $u_x(0, y) = 0$

$u_x(a, y) = 0$ $\quad , 0 < y < b$

$u_y(x, 0) = 0$

$u(x, b) = f(x)$ $\quad , 0 < x < a$

6.7 จงแสดงว่า คำตอบของปัญหาขอบเขต

D.E $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \pi, t > 0$

B.C $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, t > 0$

I.C $u(x, 0) = f(x)$

คือ

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2t}\cos mx \int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$$

7. จงแสดงว่าฟังก์ชันเจาะจงของ

$A\varphi = \lambda\varphi$

เมื่อ $\varphi'(L)+h\,\varphi(L) = 0$

มีคุณสมบัติออร์โทโกนัล

8. ให้ $\varphi(x, \lambda)$ เป็นคำตอบของ

$\varphi''+\lambda\varphi = 0$

$\varphi(0) = 1$

$\varphi'(0) = 0$

จงใช้สูตรของกรีนคำนวณหา $\int_0^L \varphi^2(x, \lambda)\,dx$

และหาคำตอบของ $\int_0^L \cos^2\frac{n\pi x}{L}\,dx$, $\int_0^L \cos^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\,dx$

9. สำหรับปัญหาค่าเจาะจง

$\varphi''+\lambda\varphi = 0, 0 < x < L$

$\varphi'(0) = 0$

$\varphi(L) = 0$

จงหา

9.1 สมการซึ่งมีรากเป็นค่าเจาะจง

9.2 ค่าเจาะจง λ_n

9.3 จงแสดงว่าค่าเจาะจงเป็นจำนวนจริง

9.4 ฟังก์ชันเจาะจง

9.5 จงแสดงว่า ฟังก์ชันเจาะจงมีคุณสมบัติออร์โทโกนัล

9.6 จงคำนวณหา

$\int_0^L \varphi_n^2(x)\, dx$

10. จงใช้ผลจากข้อ 9 แก้ปัญหาขอบเขต

D.E $u_t = ku_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < L$

B.C $u_x(0, t) = 0$

$u(L, t) = 0 \qquad , t > 0$

I.C $u(x, 0) = L - x,\ 0 < x < L$