

# ภาคผนวก

## ภาคผนวก

### 1. สูตรตรีโกณมิติที่ควรรทราบ

#### สูตรมุมประกอบ

$$\begin{aligned} 1. \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ 2. \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{aligned}$$

#### สูตรมุมพหุคูณ

$$\begin{aligned} 3. \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \\ 4. \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 \\ 5. \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned}$$

#### สูตรมุมครึ่ง

$$\begin{aligned} 6. \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ 7. \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ 8. \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \end{aligned}$$

#### ผลบวก ผลต่าง และผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned} 9. \sin A + \sin B &= 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) \\ 10. \sin A - \sin B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right) \\ 11. \cos A + \cos B &= 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) \\ 12. \cos A - \cos B &= 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{B-A}{2} \right) \\ 13. \sin A \sin B &= \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \} \\ 14. \cos A \cos B &= \frac{1}{2} \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \} \\ 15. \sin A \cos B &= \frac{1}{2} \{ \sin(A-B) + \sin(A+B) \} \end{aligned}$$

## 2. ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันชี้กำลัง

$$\begin{aligned}1. e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \\ 2. \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ 3. \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\end{aligned}$$

## 3. ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\ \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x &= 1\end{aligned}$$

สูตรต่าง ๆ คล้ายกับสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติ

## 4. สูตรอินทิกรัลฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned}1. \int \sin mx dx &= \frac{-\cos mx}{m} + C \\ 2. \int \cos nx dx &= \frac{\sin nx}{n} + C \\ 3. \int \sin mx \sin nx dx &= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c, m^2 \neq n^2 \\ 4. \int \cos mx \cos nx dx &= \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c, m^2 \neq n^2 \\ 5. \int \sin mx \cos nx dx &= \frac{\cos(n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\cos(n+m)x}{2(n+m)} + c, m^2 \neq n^2 \\ 6. \int \sinh mx dx &= \frac{\cosh mx}{m} + C \\ 7. \int \cosh nx dx &= \sinh nx/n + C\end{aligned}$$

### 5. การแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพิเศษ

	F(s)	f(t)
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
6.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
12.	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \sinh at}{a}$
15.	$\frac{s-b}{(s-b)^2 - a^2}$	$e^{bt} \cosh at$

	F(s)	f(t)
16.	$\frac{\sinh sx}{s \sinh sa}$	$\frac{x}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}$
17.	$\frac{\sinh sx}{s \cosh sa}$	$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
18.	$\frac{\cosh sx}{s \sinh as}$	$\frac{t}{a} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
19.	$\frac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
20.	$\frac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi t}{a}$
21.	$\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
22.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\frac{t^2}{2a} + \frac{2a}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{n\pi t}{a}\right)$
23.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
24.	$\frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\frac{1}{2} (t^2 + x^2 - a^2) - \frac{16a^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
25.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
26.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1) e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
27.	$\frac{\sin x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
28.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \frac{n\pi x}{a}$
29.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \frac{n\pi x}{a}$
30.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
31.	$\frac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a} + \frac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \sin \frac{n\pi x}{a}$
32.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2} (x^2 - a^2) + t - \frac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2a}$