

# บทที่ 2

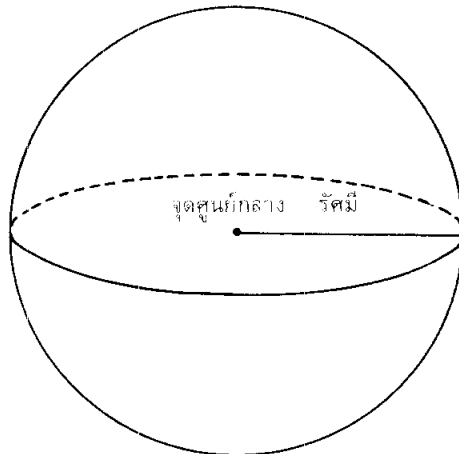
## เรขาคณิตเชิงทรงกลม (Spherical Geometry)

### 2.0 บทนำ

ตรีโกณมิติเชิงระนาบ (plane trigonometry) เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของสามเหลี่ยมในระนาบ (plane triangle) ซึ่งเราทราบกันดีอยู่แล้ว แต่ตรีโกณมิติเชิงทรงกลม (spherical trigonometry) นั้น เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของสามเหลี่ยมบนผิวของทรงกลม ที่เราเรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle) ดังนั้น พื้นฐานในการศึกษาตรีโกณมิติเชิงทรงกลม ที่สำคัญยิ่งก็คือ ต้องอาศัยพื้นฐานความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงทรงกลม (spherical geometry) เพราะฉะนั้นในบทนี้ จะกล่าวเรื่องราวเกี่ยวกับเรขาคณิตเชิงทรงกลม ในส่วนที่เกี่ยวข้องที่จะนำไปใช้ศึกษาตรีโกณมิติเชิงทรงกลมต่อไป

### 2.1 รูปทรงกลม (Sphere)

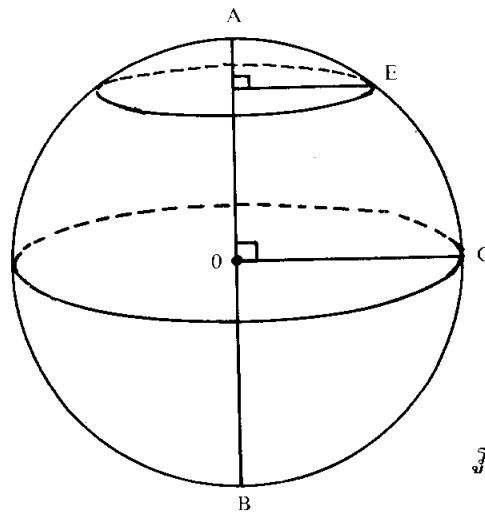
นิยาม 2.1.1 รูปทรงกลม คือ รูปที่ล้อมรอบด้วยผิวโค้ง โดยที่ทุก ๆ จุดบนผิวโค้งมีระยะห่างจากจุด ๆ หนึ่งเท่ากัน จุดคงที่จุดนั้น เรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม ส่วนของเส้นตรงใด ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดบนผิวโค้งของทรงกลมกับจุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียกว่า เส้นรัศมีของทรงกลม ความยาวของเส้นรัศมี เรียกว่า รัศมีของทรงกลม ดังรูป 2.1.1



รูป 2.1.1

หรืออาจกล่าวได้ว่า

ทรงกลมเกิดจากการหมุนครึ่งวงกลมรอบเส้นผ่านศูนย์กลาง ซึ่งทำหน้าที่เป็นแกนของการหมุน ปลายนอกของเส้นรัศมีที่ตั้งฉากกับแกนจะทำให้เกิดวงกลมใหญ่ ในขณะที่ปลายนอกของเส้นคอร์ดอื่น ๆ ที่ตั้งฉากกับแกน (เส้นผ่านศูนย์กลาง) จะทำให้เกิดวงกลมเล็ก ดังรูป 2.1.2



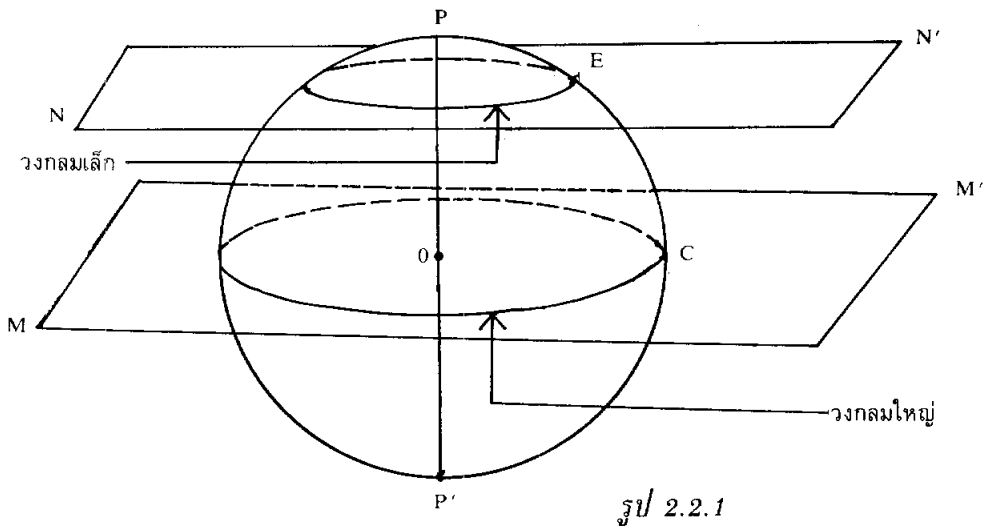
รูป 2.1.2

จากรูป 2.1.2 ทรงกลม  $O$  เกิดจากการหมุนครึ่งวงกลม  $ABC$  รอบเส้นผ่านศูนย์กลาง  $AB$  ซึ่งทำหน้าที่เป็นแกนของการหมุน ในกระบวนการเช่นนี้ จุด  $C$  ซึ่งเป็นจุดปลายนอกของรัศมี ที่ตั้งฉากกับแกนย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่ โดยที่จุด  $E$  ซึ่งเป็นจุดปลายนอกของเส้นคอร์ดที่ตั้งฉากกับแกน ย่อมทำให้เกิดวงกลมเล็ก

## 2.2 จุดและเส้นบนทรงกลม

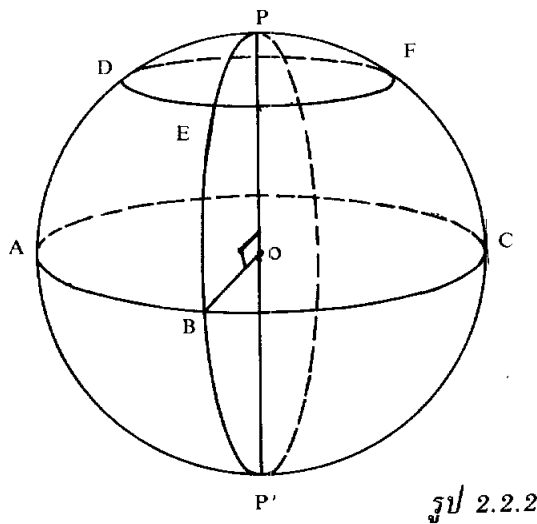
เรขาคณิตเชิงทรงกลม (spherical geometry) เป็นการศึกษาถึงความสัมพันธ์ของจุด เส้น สามเหลี่ยม ฯลฯ บนพื้นผิวของทรงกลม ซึ่งสิ่งเหล่านี้มีความหมายแตกต่างไปจากความหมายในเรขาคณิตเชิงระนาบ (plane) ข้อแตกต่างประการแรกก็คือ ความหมายของคำว่า “เส้น” ในเรขาคณิตเชิงระนาบ “เส้น” หมายถึง “เส้นตรง” แต่ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม “เส้น” หมายถึง “วงกลมใหญ่” (great circle)

**วงกลมใหญ่** (great circle) คือ วงกลมที่เกิดจากระนาบตัดทรงกลม โดยระนาบนั้นตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งเส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากับรัศมีของทรงกลม แต่ถ้าระนาบตัดทรงกลมโดยที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม เส้นตัดจะเป็นวงกลมที่มีรัศมีสั้นกว่ารัศมีของทรงกลม เรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมเล็ก (small circle) ดังรูป 2.2.1



เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม ซึ่งตั้งฉากกับระนาบของวงกลม เรียกว่า แกน (axis) ของวงกลม แกนนี้จะตัดทรงกลม 2 จุด เรียกจุดทั้งสองนี้ว่า ขั้ว (pole) ของวงกลม (ทั้งวงกลมเล็ก และวงกลมใหญ่) ในรูป 2.2.1 จุด P และ P' เป็นขั้วของทั้งวงกลมเล็กและวงกลมใหญ่ ทั้งนี้เพราะว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง  $PP'$  ตั้งฉากกับระนาบ  $MM'$  ซึ่งเป็นระนาบของวงกลมใหญ่ ดังนั้น P และ P' จึงเป็นขั้วของวงกลมใหญ่ และในขณะเดียวกัน เส้นผ่านศูนย์กลาง  $PP'$  ก็ตั้งฉากกับระนาบ  $NN'$  ซึ่งเป็นระนาบของวงกลมเล็ก ดังนั้น P และ P' จึงเป็นขั้วของวงกลมเล็กด้วย

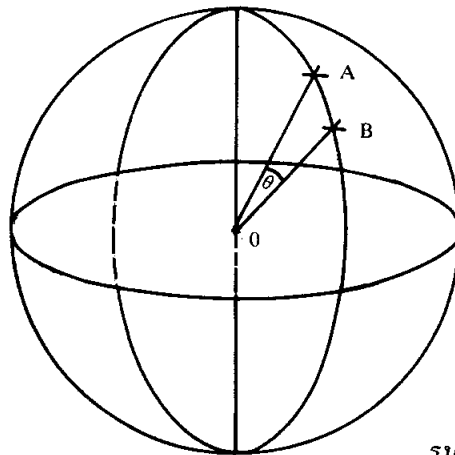
ระยะขั้ว (polar distance) ของวงกลม คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม ซึ่งวัดจาก จุดใดจุดหนึ่งบนวงกลม ไปยังขั้วของวงกลมนั้น ดังรูป 2.2.2



จากรูป 2.2.2 ระยะซั้วของวงกลมใหญ่ ABC เป็น  $90^\circ$  เพราะว่า ส่วนโค้ง PB มีความยาวเป็น  $90^\circ$  และระยะซั้วของวงกลมเล็ก DEF คือ ความยาวของส่วนโค้ง PE หรือ PF

**ข้อสังเกต** อาจกล่าวได้ว่า ระยะซั้วของวงกลมใหญ่ทั้งหมดเป็น  $90^\circ$

**ระยะเชิงทรงกลม** (spherical distance) ระหว่างจุด 2 จุด คือ ความยาวของส่วนโค้งน้อย (minor arc) ของวงกลมใหญ่ที่ผ่านจุดทั้งสองนั้น ส่วนโค้งน้อยนี้เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวของทรงกลม ดังรูป 2.2.3 ระยะทางระหว่าง จุด A และจุด B ก็คือ ส่วนโค้งน้อย AB



รูป 2.2.3

โดยทั่ว ๆ ไป เรามักบอกความยาวส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ด้วยมุมซึ่งรอบรับส่วนโค้งนี้ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม ดังนั้น จากรูป 2.2.3 จะได้ว่า ส่วนโค้ง AB มีความยาวเป็น  $\theta$  และได้ด้วยว่า หนึ่งในสี่ของวงกลมใหญ่ย่อมมีความยาวส่วนโค้งเป็น  $90^\circ$  โดยทั่ว ๆ ไป จุดสองจุดใด ๆ บนผิวของทรงกลม โดยที่จุดทั้งสองนี้ ไม่เป็นจุดปลายสุดของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมแล้ว จุดทั้งสองนี้ย่อมอยู่บนวงกลมใหญ่ จากรูป 2.2.3 A และ B เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนผิวของทรงกลม โดยที่ เส้นตรง AB ไม่เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม แล้วย่อมได้ว่า จุด A, B และจุดศูนย์กลาง O ของทรงกลม ย่อมประกอบกันเป็นระนาบขึ้นหนึ่งระนาบ และระนาบนี้ตัดทรงกลมเป็นวงกลมใหญ่

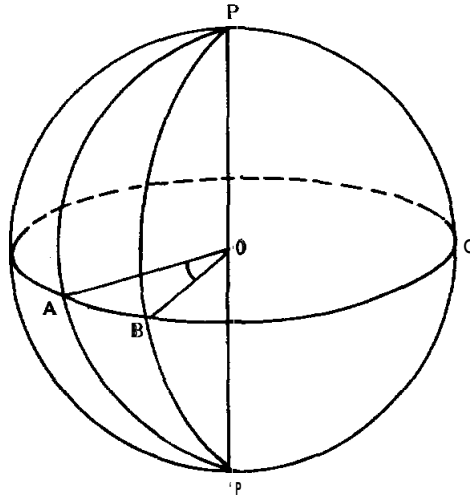
**ข้อสังเกต**

- (1) จุด 2 จุดใด ๆ บนผิวของทรงกลมที่ไม่ใช่จุดซั้ว ย่อมทำให้เกิดวงกลมใหญ่เพียงวงเดียวเท่านั้น
- (2) วงกลมใหญ่ 2 วงใด ๆ บนผิวทรงกลม ย่อมตัดกันสองแห่ง

### 2.3 มุมเชิงทรงกลม (spherical angle)

มุมเชิงทรงกลม คือ มุมที่เกิดจากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สองวงตัดกัน เรียกส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ว่า แขน (side) และเรียกจุดตัดของวงกลมใหญ่ทั้งสองว่า จุดยอด (vertex) ของมุมเชิงทรงกลม

มุมเชิงทรงกลม มีขนาดของมุมเท่ากับมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของวงกลมใหญ่ ซึ่งมีส่วนโค้งเป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

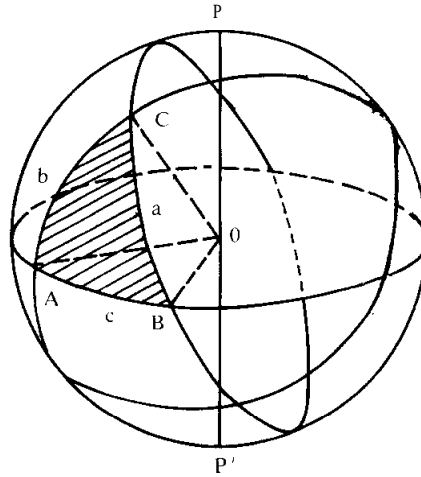
จากรูป 2.3.1  $APB$  เป็นมุมเชิงทรงกลมบนทรงกลมที่มี  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมี  $P$  เป็นจุดยอด และส่วนโค้ง  $PA$  กับ  $PB$  เป็นแขนของมุมเชิงทรงกลม  $APB$  และวงกลม  $ABC$  เป็นวงกลมใหญ่ที่มีจุดยอด  $P$  ของมุมเชิงทรงกลมเป็นขั้ว มุมระหว่างสองระนาบ  $A-P-O-B$  ก็คือมุมระนาบ  $AOB$  ซึ่งเป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง  $O$  ของวงกลม  $ABC$  และยังได้ว่า มุม  $AOB$  วัดเป็นองศาได้เท่ากับความยาวของส่วนโค้ง  $AB$  (เพราะว่ามุมที่ศูนย์กลางของวงกลมวัดเป็นองศาหรือเรเดียน เท่ากับความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้น)

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า มุมเชิงทรงกลม (spherical angle) วัดเป็นองศาได้เท่ากับส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น

### 2.4 สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical triangle)

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนของผิวทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่แต่ละวงที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมนี้ เราเรียกว่า ด้าน

(sides) และจุดยอดของมุมเชิงทรงกลมทั้งสามมุม เราเรียกว่า จุดยอด (vertices) ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยปกติเรามักใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่  $A, B, C$  แทนจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็ก  $a, b$  และ  $c$  แทนด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุม  $A, B$  และ  $C$  ตามลำดับ พิจารณา รูป 2.4.1



รูป 2.4.1

จากรูป 2.4.1 ได้ว่า  $A, B$  และ  $C$  เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับจุดศูนย์กลาง  $O$  ของทรงกลม คือ ลากเส้น  $OA, OB$  และ  $OC$  แล้วจะทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบ (trihedral angle) ที่ศูนย์กลางของทรงกลมขึ้น คือ มุม  $O-ABC$  (นั่นคือ ระนาบของวงกลมใหญ่ทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ทำให้เกิดมุมระหว่างสามระนาบขึ้นที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม) วัดความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้วยมุมหน้า (face angle) ของมุมระหว่างสามระนาบ นั่นคือ วัดความยาวของด้าน  $a, b$  และ  $c$  ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมด้วยมุมหน้า  $BOC, COA$  และ  $AOB$  ของมุมระหว่างสามระนาบตามลำดับ และวัดขนาดของมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ด้วยมุมระหว่างสองระนาบที่เกิดจากระนาบของด้านคู่หนึ่ง นั่นคือ วัดขนาดของมุม  $A$  ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ  $B-OA-C$  วัดขนาดของมุม  $B$  ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ  $A-OB-C$  และวัดขนาดของมุม  $C$  ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ  $A-OC-B$

**ข้อสังเกต** เนื่องจากวัดความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างสามระนาบ ดังนั้น ด้าน  $a, b, c$  ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม จึงวัดเป็นองศาหรือเรเดียน

โดยทั่วไป เราจะพิจารณาเฉพาะสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีด้านแต่ละด้าน และมุมแต่ละมุม น้อยกว่า  $180^\circ$  ซึ่งสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมดังกล่าวจะมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

- (1) ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งรวมกันย่อมมากกว่าด้านที่สาม  
นั่นคือ  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  และ  $b + c > a$
- (2) ด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันเข้าย่อมน้อยกว่า  $360^\circ$   
นั่นคือ  $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$
- (3) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง ยาวเท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านทั้งสองย่อมมีขนาดเท่ากัน
- (4) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดเท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวเท่ากัน
- (5) ถ้าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีความยาวไม่เท่ากันแล้ว มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านทั้งสองย่อมมีขนาดไม่เท่ากัน และมุมที่ใหญ่กว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่า
- (6) ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่งมีขนาดไม่เท่ากันแล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมทั้งสองย่อมยาวไม่เท่ากัน และด้านที่ยาวกว่าย่อมอยู่ตรงข้ามกับมุมที่ใหญ่กว่า
- (7) มุมทั้งสามมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันมากกว่า  $180^\circ$  และน้อยกว่า  $540^\circ$

$$\text{นั่นคือ } 180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

- (8) มุมสองมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมรูปหนึ่ง รวมกันย่อมน้อยกว่าผลบวกระหว่างมุมที่สามกับ  $180^\circ$

$$\text{นั่นคือ } A + B < C + 180^\circ$$

$$A + C < B + 180^\circ$$

$$\text{และ } B + C < A + 180^\circ$$

### ข้อสังเกต

สามเหลี่ยมบนระนาบมีมุมฉากอย่างมากหนึ่งมุม หรือมีมุมป้านอย่างมากหนึ่งมุม แต่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมอาจมีสองหรือสามมุมฉาก หรืออาจมีมุมป้านสองหรือสามมุมป้าน สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากเพียงหนึ่งมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมฉาก (right spherical triangle) สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากสองมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

สองมุมฉาก (birectangular spherical triangle) และสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุมฉากสามมุม เรียกว่า สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสามมุมฉาก (trirectangular spherical triangle)

**มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม** (spherical excess) คือ ผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม กับผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ หรืออาจกล่าวได้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ก็คือ จำนวนองศาที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเกินกว่า  $180^\circ$  มักเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E

เช่น สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่มีมุม  $A = 75^\circ$ ,  $B = 82^\circ$  และ  $C = 125^\circ$  แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E &= (A + B + C) - 180^\circ \\ &= (75^\circ + 82^\circ + 125^\circ) - 180^\circ \\ &= 102^\circ \end{aligned}$$

แสดงว่า  $E = 102^\circ$  เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC

### การเท่ากันทุกประการของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมสองรูปอยู่บนทรงกลมเดียวกัน หรือทรงกลมที่เท่ากัน มีมุมทั้งสามของรูปหนึ่งเท่ากับมุมทั้งสามของอีกรูปหนึ่งตามลำดับแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองย่อมเท่ากันทุกประการ

**ข้อสังเกต** สำหรับสามเหลี่ยม 2 รูปบนระนาบ ถ้ามีมุมทั้งสามที่ได้ลำดับกันเท่ากันแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเป็นสามเหลี่ยมคล้าย แต่สำหรับบนทรงกลมแล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะเท่ากันทุกประการ ดังนั้น ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม จึงไม่มีสามเหลี่ยมคล้าย

**ตัวอย่าง 2.4.1** ให้ A และ B เป็นจุดของวงกลมใหญ่ 2 จุด ซึ่งอยู่บนผิวทรงกลมที่มี 0 เป็นจุดศูนย์กลาง และให้จุด P เป็นขั้วของวงกลมใหญ่แล้ว จงแก้ปัญหของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP เมื่อกำหนดให้

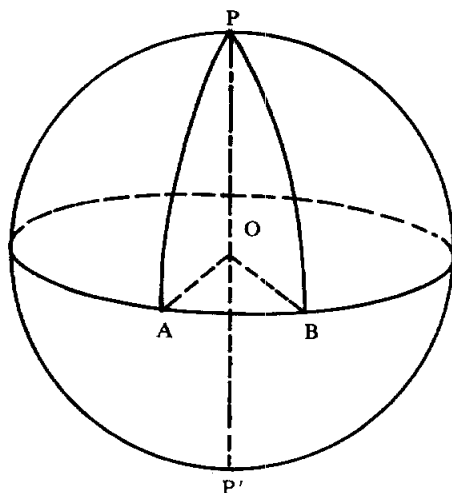
(1)  $AB = 75^\circ$

(2)  $AB = 90^\circ$

### วิธีทำ

ลากส่วนโค้งของวงกลมใหญ่เชื่อม AP และ BP ดังรูป 2.4.1





รูป 2.4.1

เพราะว่า ทุก ๆ จุดบนวงกลมใหญ่ ย่อมมีระยะห่างจากจุดขั้วของวงกลมใหญ่เป็น  $90^\circ$  ดังนั้น  $AP = BP = 90^\circ$

มุมเชิงทรงกลม PAB หรือมุม A ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP วัดขนาดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ P-AO-B ซึ่งมีหน้าของมุมเป็นระนาบที่ตั้งฉากกัน ดังนั้น มุม  $A = 90^\circ$

และมุมเชิงทรงกลม PBA หรือมุม B วัดขนาดได้ด้วยมุมระหว่างสองระนาบ P-BO-A ซึ่งมีหน้าของมุมเป็นระนาบที่ตั้งฉากกัน ดังนั้น มุม  $B = 90^\circ$

(1) เพราะว่ามีมุมเชิงทรงกลม APB หรือมุม P วัดขนาดได้ด้วยมุมระนาบ AOB ซึ่งมีขนาดเท่ากับส่วนโค้ง AB

จากกำหนดให้  $AB = 75^\circ$

ดังนั้น ด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP ก็คือ  $AP = 90^\circ$ ,  $BP = 90^\circ$  และ  $AB = 75^\circ$  และมุมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP ก็คือ  $A = 90^\circ$ ,  $B = 90^\circ$  และ  $P = 75^\circ$

(2) กำหนดให้  $AB = 90^\circ$

ดังนั้น ในทำนองเดียวกันกับ (1) จึงได้ว่า

สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABP มีด้าน  $AP = BP = AB = 90^\circ$  และมีมุม  $A = B = P = 90^\circ$

ตัวอย่าง 2.4.2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้จะพิจารณาว่า สิ่งต่าง ๆ ที่กำหนดมาให้สามารถเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC ได้หรือไม่

(1)  $AB = 60^\circ$ ,  $BC = 80^\circ$ ,  $CA = 100^\circ$

(2)  $AB = 45^\circ$ ,  $BC = 55^\circ$ ,  $CA = 125^\circ$

(3)  $AB = 100^\circ$ ,  $BC = 120^\circ$ ,  $CA = 150^\circ$

### วิธีทำ

(1) จาก  $AB = 60^\circ$ ,  $BC = 80^\circ$  และ  $CA = 100^\circ$  จะได้ว่า  $AB$ ,  $BC$  และ  $CA$  สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  ได้ เพราะว่า ผลรวมของความยาวของด้านสองด้านใด ๆ ยาวกว่าด้านที่สาม คือ

$$AB + BC > CA \quad (60^\circ + 80^\circ > 100^\circ)$$

$$AB + CA > BC \quad (60^\circ + 100^\circ > 80^\circ)$$

$$BC + CA > AB \quad (80^\circ + 100^\circ > 60^\circ)$$

และความยาวของด้านทั้งสามรวมกันน้อยกว่า  $360^\circ$  คือ  $AB + BC + CA < 360^\circ$  หรือ  $60^\circ + 80^\circ + 100^\circ = 240^\circ < 360^\circ$

(2) จาก  $AB = 45^\circ$ ,  $BC = 55^\circ$  และ  $CA = 125^\circ$

จะได้ว่า  $AB$ ,  $BC$  และ  $CA$  ไม่สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  เพราะว่า  $AB + BC < CA$

$$\text{หรือ} \quad 45^\circ + 55^\circ = 100^\circ < 125^\circ$$

(3) จาก  $AB = 100^\circ$ ,  $BC = 120^\circ$  และ  $CA = 150^\circ$

จะได้ว่า  $AB$ ,  $BC$  และ  $CA$  ไม่สามารถประกอบเป็นด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  เพราะว่า  $AB + BC + CA > 360^\circ$

$$\text{หรือ} \quad 100^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 370^\circ > 360^\circ$$

**ข้อสังเกต** ในข้อ (3) นี้ ผลรวมของด้านสองด้านใด ๆ ต่างก็ยาวกว่าด้านที่สาม แต่ผลรวมของด้านสามด้านยาวกว่า  $360^\circ$  จึงไม่ใช่ด้านของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

## แบบฝึกหัด 2.4

1. จงแก้ปัญหของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC เมื่อกำหนดให้
  - 1.1)  $A = B = C = 90^\circ$
  - 1.2)  $a = b = 90^\circ, c = 60^\circ$
2. จงพิจารณาว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของด้านทั้งสามดังนี้
  - 2.1)  $160^\circ, 110^\circ, 85^\circ$
  - 2.2)  $170^\circ, 150^\circ, 10^\circ$
  - 2.3)  $170^\circ, 150^\circ, 50^\circ$
  - 2.4)  $30^\circ, 50^\circ, 70^\circ$
3. จงพิจารณาว่า เป็นไปได้หรือไม่ที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC จะมีขนาดของมุมทั้งสามดังนี้
  - 3.1)  $30^\circ, 37^\circ, 128^\circ$
  - 3.2)  $30^\circ, 37^\circ, 111^\circ$
  - 3.3)  $37^\circ, 51^\circ, 131^\circ$
  - 3.4)  $40^\circ, 85^\circ, 140^\circ$
  - 3.5)  $60^\circ, 70^\circ, 90^\circ$
  - 3.6)  $60^\circ, 115^\circ, 145^\circ$
  - 3.7)  $60^\circ, 20^\circ, 90^\circ$

## 2.5 พื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม

ถ้าทรงกลมมีรัศมียาวเท่ากับ  $R$  แล้ว พื้นที่ผิวของทรงกลม คือ  $4\pi R^2$  และพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมบนผิวของทรงกลมนี้ คือ  $\frac{\pi R^2 E}{180}$  เมื่อ  $E$  เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่อยู่ในรูปองศาของสามเหลี่ยม

หรือ อาจกล่าวได้ว่า ถ้าให้  $K$  เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมที่อยู่บนผิวทรงกลมที่มีรัศมี คือ  $R$  แล้ว

$$K = \frac{\pi R^2 E}{180} \quad \text{ถ้า } E \text{ เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่มีหน่วยเป็นองศา}$$

$$\text{หรือ } K = R^2 E \quad \text{ถ้า } E \text{ เป็นมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน}$$

### ข้อสังเกต

สามเหลี่ยม 2 รูปที่มีผลบวกของมุมภายในเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

ตัวอย่าง 2.5.1 ถ้า  $ABC$  เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ที่มีมุม  $A = 150^\circ$ ,  $B = 138^\circ$ ,  $C = 132^\circ$  ซึ่งอยู่บนผิวทรงกลมที่มีรัศมียาว 10 หน่วย แล้ว

- (1) จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$
- (2) จงหาพื้นที่ผิวของทรงกลม
- (3) จงหาอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม กับพื้นที่ผิวของทรงกลม

## วิธีทำ

(1) จาก ABC เป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม โดยที่มีมุม  $A = 150^\circ$ ,  $B = 138''$  และ  $C = 132^\circ$

$$\text{จาก } E = A + B + C - 180''$$

$$\begin{aligned}\therefore E &= 150'' + 138'' + 132'' - 180'' \\ &= 420'' - 180'' \\ &= 240''\end{aligned}$$

ถ้า  $K$  เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม แล้ว

$$K = \frac{\pi R^2 E}{180}$$

ในที่นี้  $R = 10$ ,  $E = 240''$

$$\begin{aligned}\therefore K &= \frac{\pi(10)^2(240^\circ)}{180} \\ &= \frac{400\pi}{3}\end{aligned}$$

ดังนั้น สามเหลี่ยมเชิงทรงกลม ABC มีพื้นที่เท่ากับ  $\frac{400\pi}{3}$  ตารางหน่วย

(2) จากทรงกลมมีรัศมียาว 10 หน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวทรงกลม คือ  $4\pi(10)^2 = 400\pi$  ตารางหน่วย

(3) อัตราส่วนระหว่างพื้นที่สามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวทรงกลม

$$\text{คือ } \frac{400\pi/3}{400\pi} = \frac{1}{3}$$

### แบบฝึกหัด 2.5

กำหนดให้ทรงกลม  $O$  มีรัศมียาว 10 หน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  บนผิวของทรงกลมนี้ และอัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมกับพื้นที่ผิวของทรงกลม เมื่อกำหนดส่วนต่าง ๆ ของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลม  $ABC$  ให้ดังต่อไปนี้

1.  $A = B = C = 110^\circ$
  2.  $A = 60^\circ, B = 70^\circ, C = 90^\circ$
  3.  $A = 30^\circ, B = 37^\circ, C = 128^\circ$
  4.  $A = 37^\circ, B = 51^\circ, C = 131^\circ$
  5.  $a = b = 90^\circ, c = 60^\circ$
-

## 2.6 รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม (spherical polygons)

รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม คือ ส่วนบนพื้นผิวของทรงกลมที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้งของวงกลมใหญ่สามวง หรือมากกว่า รูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมทุกรูปมีมุมระหว่างหลายระนาบ (polyhedral angle) ซึ่งจุดยอดของมุมอยู่ที่ศูนย์กลางของทรงกลม ขนาดด้านของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลมวัดได้ด้วยมุมหน้าของมุมระหว่างหลายระนาบที่สมนัยกัน

สำหรับ รูป  $n$  เหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ สามารถแบ่งออกเป็นสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมได้  $n-2$  รูป โดยการลากเส้นทะแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่ง และผลรวมมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ ย่อมเท่ากับผลรวมของผลต่างระหว่างผลบวกของมุมของรูปหลายเหลี่ยมกับ  $(n-2)180^\circ$  หรืออาจกล่าวได้ว่า ผลรวมมุมส่วนเกินเชิงทรงกลมของสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมเหล่านี้ เท่ากับผลรวมมุมของรูปหลายเหลี่ยม ลบด้วย  $(n-2)180^\circ$  โดยจะเรียกผลต่างนี้ว่า มุมส่วนเกินเชิงทรงกลม (spherical excess) ของรูปหลายเหลี่ยมเชิงทรงกลม

### ข้อสังเกต

เนื่องจากผลบวกของมุมของรูปสามเหลี่ยมเชิงทรงกลมมากกว่า 2 มุมฉาก จึงได้ว่าผลบวกของมุมของรูปสี่เหลี่ยมเชิงทรงกลมใด ๆ ย่อมมากกว่า 4 มุมฉาก ดังนั้น ในเรขาคณิตเชิงทรงกลม จึงไม่มีรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเชิงทรงกลม