บทที่ 1
ความรู้ที่เป็นประโยชน์
(Some Useful Knowledges)

1.1 บทนำ

เนื่องจากผลการแปลงฟูริเยร์ และผลการแปลงลาปลาซ เป็นเทคนิคอย่างหนึ่งที่สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ (โดยเฉพาะเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์) ในทางวิศวกรรมศาสตร์ และทางฟิสิกส์ การที่จะศึกษาเรื่องราวเหล่านี้ให้เข้าใจ จำเป็นต้องอาศัยความรู้พื้นฐานอื่น ๆ มาช่วยเป็นอย่างมาก เช่น คุณสมบัติของฟังก์ชัน, อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral) และฟังก์ชันพิเศษที่พบบ่อย ๆ ในการประยุกต์เป็นต้น โดยที่ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงนี้ จะไม่พิสูจน์ แต่สามารถค้นคว้าได้จากหนังสือแคลคูลัสชั้นสูง

1.2 คุณสมบัติบางอย่างของฟังก์ชัน

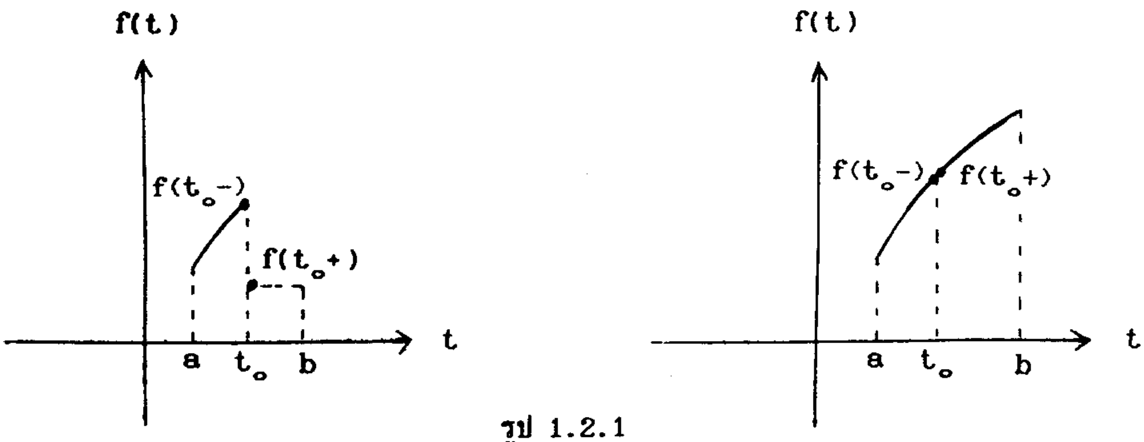
ก่อนอื่น เราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้ เพื่อให้สะดวกในการอ้างถึง

$$f(t_o-) = \lim_{t \to t_o-} f(t)$$

และ

$$f(t_o+) = \lim_{t \to t_o+} f(t)$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้ และมีค่าจำกัด เราจะเรียกลิมิตทั้งสองนี้ว่า ลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวา ของ $f(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_o ตามลำดับ



รูป 1.2.1

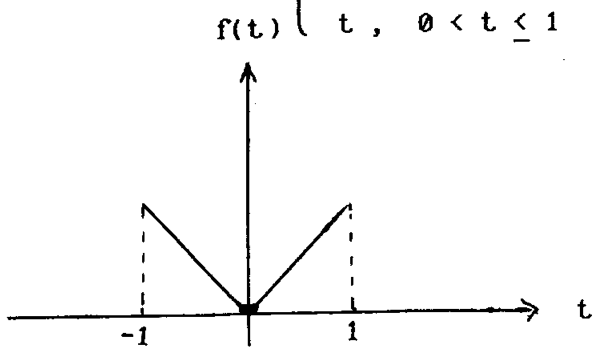
<u>บทนิยาม</u> 1.2.1

เราเรียก ฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าต่อเนื่องที่จุด t_o ถ้า

$$f(t_o-) = f(t_o+) = f(t_o)$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.2.1

$$f(t) = |t| = \begin{cases} -t , & -1 < t < 0 \\ t , & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$



รูป 1.2.2

จะพบว่า $f(0-) = f(0+) = f(0) = 0$

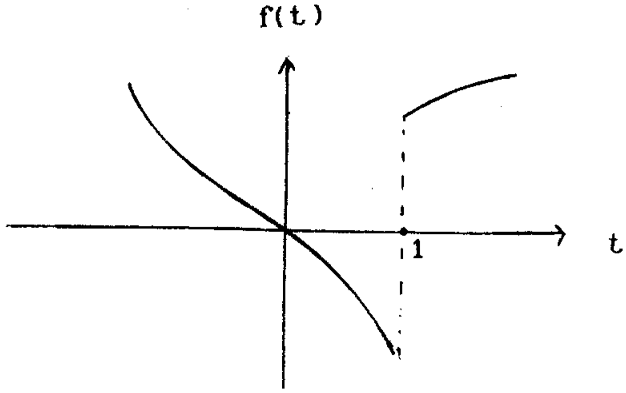
ดังนั้น $f(t) = |t|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $t = 0$

บทนิยาม 1.2.2

เราเรียกจุดไม่ต่อเนื่องกรณีที่ลิมิตทางซ้าย และลิมิตทางขวามีค่า แต่ค่าไม่เท่ากันว่า จุดไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด (Jump Discontinuity)

ตัวอย่าง 1.2.2

$$f(t) = \begin{cases} -t^3 & , t < 1 \\ 0 & , t = 1 \\ \sqrt{t} & , t > 1 \end{cases}$$

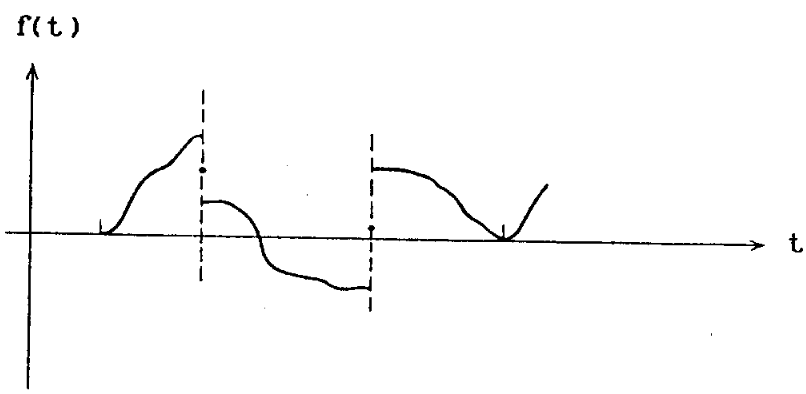


รูป 1.2.3

จะพบว่า $f(1-) = -1$, $f(1+) = 1$

บทนิยาม 1.2.3

เราเรียกฟังก์ชัน f(t) ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (Piecewise Continuous) ในช่วง [a,b] ถ้าในช่วงดังกล่าวมีจุดไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด เป็นจำนวนจำกัด



รูป 1.2.4

หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า สำหรับ $a=t_1<t_2<\ldots<t_n = b$, $f(t)$ ต่อเนื่องในช่วง $t_j<t<t_{j+1}$ และ $f(t_j+)$, $f(t_j-)$ หาค่าได้เมื่อ $j = 1,2,\ldots n-1$

ตัวอย่าง 1.2.3

ฟังก์ชัน $\frac{1}{t}$ และ $\sin\frac{1}{t}$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เป็นช่วง ๆ ในช่วงปิด $[0,1]$ เพราะว่า ลิมิตทางขวา $f(0+)$ หาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต

1. ถ้าฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ สำหรับ $-\infty < t < \infty$ เราเรียกว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ
2. เนื่องจากลิมิตทางซ้ายและทางขวาของแต่ละช่วงมีค่าได้ ดังนั้นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ จะมีขอบเขตในช่วงจำกัด
3. ฟังก์ชันต่อเนื่อง เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

บทนิยาม 1.2.4

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่าเป็นฟังชันเรียบเป็นช่วง ๆ (Piecewise Smooth) ถ้า $f(t)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ใน $[a,b]$ และ $f'(t)$ ต่อเนื่องในแต่ละช่วง $t_j < t < t_{j+1}$ ด้วย โดยอนุพันธ์ทางซ้าย,ทางขวา คือ $f'(t_j-)$, $f'(t_j+)$ หาค่าได้

ตัวอย่าง 1.2.4

$$f(t) = |t| \quad , \quad -\pi < t < \pi$$

กำหนดให้ $t_1 = -\pi$, $t_2 = 0$, $t_3 = \pi$ ในที่นี้ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงทั้งสอง ; f' ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ โดยที่ $f'(0+) = 1$, $f'(0-) = -1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ

ตัวอย่าง 1.2.5

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & , \; -\pi < t < 0 \\ t^2 + 1 , & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

ตัวอย่างนี้ f ต่อเนื่อง ยกเว้นที่จุด $t = 0$ โดย $f(0+) = 1$ และ $f(0-) = 0$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ บน $(-\pi, \pi)$

ตัวอย่าง 1.2.6

$$f(t) = t\,|t| \quad , \quad -\pi < t < \pi$$

ในกรณีนี้ f และ f' ต่อเนื่องทุก ๆ ที่ ยกเว้นที่ $t = 0$

โดยที่ $f'(0+) = f'(0-) = 0$

ดังนั้น f เรียบเป็นช่วง ๆ บน $(-\pi,\pi)$

ตัวอย่าง 1.2.7

$$f(t) = t^2 \sin\frac{1}{t} \quad , -\pi < t < \pi$$

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $(-\pi,\pi)$; f' ต่อเนื่องบน $(-\pi,\pi)$ ยกเว้นที่จุด $t = 0$ อย่างไรก็ตาม $f'(0+)$ และ $f'(0-)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ แต่ไม่เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ

ตัวอย่าง 1.2.8

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - \pi^2} \quad , \quad -\pi < t < \pi$$

แม้ว่ากรณีนี้ f จะต่อเนื่องบนช่วง $(-\pi,\pi)$ แต่ก็ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ เพราะว่า $f(-\pi+)$ และ $f(\pi-)$ มีค่าไม่จำกัด จึงทำให้ไม่เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ ด้วย

บทนิยาม 1.2.5

เราเรียกฟังก์ชัน $f(t)$ ว่า อินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์ (absolutely integrable) บนช่วง $a \le t \le b$ ก็ต่อเมื่อ $\int_a^b |f(t)|dt$ หาค่าได้

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.2.1

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $a \leq t \leq b$ แล้ว

$$\int_a^b |f(t)|\, dt$$ หาค่าได้

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.2.2

ถ้า $f(t)$ อินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์แล้ว $f(t)$ จะอินทิเกรตได้ นั่นคือ

ถ้า $$\int_a^b |f(t)|\, dt$$ หาค่าได้แล้ว

$$\int_a^b f(t)\, dt$$ สามารถหาค่าได้ด้วย

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.2.3

ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $a \leq t \leq b$ แล้ว

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b \left| f(t) \right| dt$$

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.2.4

ถ้าในช่วง $a \leq t \leq b$, $h(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีอนุพันธ์เป็นฟังชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

$$f(t) = \frac{dh}{dt}(t)$$

แล้ว

$$\int_a^b f(t)\, dt = h(b)-h(a)$$

ทฤษฎีบท 1.2.5

ถ้า f(t) ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ, $a \leq t \leq b$ และ x เป็นจำนวนในช่วงดังกล่าว แล้ว

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

จะเป็นฟังก์ชันในตัวแปร x และ

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

ที่ทุก ๆ จุดซึ่ง f(x) ต่อเนื่องในช่วง [a,b]

ทฤษฎีบท 1.2.6 (การอินทิเกรตทีละส่วน)

ถ้า f(t) และ g(t) ต่างก็เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a.b] โดยอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ แล้ว

$$\int_a^b f(t)\frac{dg}{dt}(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(t)\frac{df}{dt}(t)dt$$

<u>แบบฝึกหัดที่ 1.2</u>

จงพิจารณาว่าฟังก์ชันใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเรียบเป็นช่วง ๆ

1. $f(t) = |t|^{3/2} \quad , -2 < t < 2$

2. $f(t) = \begin{cases} t-1 & , t > 0 \\ t+1 & , t < 0 \end{cases} \quad , -1 < t < 1$

3. $f(t) = t^4 \sin \frac{1}{t} \; , -1 < t < 1$

4. $f(t) = \ell^{-(1/t^2)} \; , -1 < t < 1$

5. $f(t) = \sqrt{1-t^2}$

6. $f(t) = \sqrt[3]{t^2}$

<u>คำตอบ</u>

1. เป็น

4. เป็น

5. ไม่เป็น

6. ไม่เป็น

1.3 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

อินทิกรัลไม่ตรงแบบมี 2 ชนิด ชนิดแรก ตัวถูกอินทิเกรต (integrand) มีค่าจำกัด แต่ช่วงในการอินทิเกรตเป็นอนันต์ ชนิดที่สอง ช่วงในการอินทิเกรตจำกัด แต่ตัวถูกอินทิเกรตมีค่าอนันต์ในช่วงดังกล่าว

อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 1:

เรานิยามอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดแรกดังนี้

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(t)dt ,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)dt ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(t)dt + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(t)dt , \quad -\infty < c < \infty$$

เมื่อลิมิตเหล่านี้หาค่าได้ เราเรียกว่า อินทิกรัลเหล่านี้ลู่เข้า(converges) ไปยังค่าของลิมิตนั้น แต่เมื่อลิมิตหาค่าไม่ได้ เรียกอินทิกรัลนั้นว่า ลู่ออก (diverges)

ตัวอย่าง 1.3.1

จงหาค่าของ $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b$$

ซึ่งหาค่าลิมิตไม่ได้ ดังนั้นอินทิกรัล $\int_1^{\infty} \frac{1}{t}dt$ ลู่ออก (หาค่าไม่ได้)

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3.2

จงหาค่าของ $\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก $\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^{b} e^{-t}\,dt$

$$= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1})$$

$$= \frac{1}{e}$$

ดังนั้นอินทิกรัล $\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt$ ลู่เข้า (หาค่าได้) และมีค่า $\frac{1}{e}$

ตัวอย่าง 1.3.3

จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt = \int_{-\infty}^{c} \sin t \, dt + \int_{c}^{\infty} \sin t \, dt$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \sin t \, dt + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} \sin t \, dt$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (\cos a - \cos c) + \lim_{b \to \infty} (\cos c - \cos b)$$

ซึ่งลิมิตทั้งสองหาค่าไม่ได้

แต่ถ้าให้ a=b จะพบว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin t \, dt = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \sin t \, dt + \lim_{a \to \infty} \int_{c}^{a} \sin t \, dt$$

$$= \lim_{a \to -\infty} (\cos a - \cos c) + \lim_{a \to \infty} (\cos c - \cos a)$$

$$= 0$$

ซึ่งหาค่าอินทิกรัลได้

กรณีนี้เขียนในรูปทั่วไปก็คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt$$

เรียกว่า "ค่าหลักของโคชี" (Cauchy's Principal value) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า "ค่าหลัก" ของอินทิกรัล และเขียนแทนด้วย

/ ว $$PV \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(t)dt$$

ดังนั้นเวลาพิจารณาค่าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ จะพิจารณาให้กว้างไว้ คือพิจารณาถึงค่าหลักนี้

<u>ข้อสังเกต</u>

ถ้าอินทิกรัลที่หาแบบธรรมดาหาได้แล้ว ค่าที่ได้จะเท่ากับ หาแบบค่าหลัก

<u>อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่</u> 2:

ถ้าตัวถูกอินทิเกรตของอินทิกรัล

$$\int_{a}^{b} f(t)dt$$

มีค่าอนันต์ในช่วงจำกัด a และ b โดยมีจำนวนจุดเป็นจำนวนจำกัดดังนี้ $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ แล้ว เราเรียกอินทิกรัลชนิดนี้ว่าเป็นชนิดที่สอง ซึ่งเราสามารถเขียนอินทิกรัลนี้ ในรูปผลบวกของอินทิกรัลที่มีลิมิตในการอินทิเกรตเป็นจุดเหล่านี้ เพียงจุดเดียวได้

ถ้า $t\to a$ แล้ว $f(t)$ มีค่าอนันต์ จะเขียนได้เป็น

$$\int_{a}^{b} f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a-\varepsilon}^{b} f(t)dt$$

ถ้า $t\to b$ แล้ว $f(t)$ มีค่าอนันต์ จะเขียนได้เป็น

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(t)dt$$

และถ้า f(t) มีค่าอนันต์ ที่ a และ b จะเขียนได้เป็น

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(t)dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(t)dt + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(t)dt$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3.4

จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\int_0^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{t}dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln 1 - \ln \varepsilon)$$

ซึ่งมีค่าอนันต์ (หาค่าไม่ได้) ดังนั้น อินทิกรัลลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3.5

จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2(1-\sqrt{\varepsilon})$$

$$= 2$$

ดังนั้นอินทิกรัลลู่เข้าสู่ค่า 2

สำหรับค่าหลักของอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่ 2 เป็นดังนี้

ถ้า $f(t)$ มีค่าอนันต์ที่ c และ $\int_a^b f(t)dt$ หาค่าไม่ได้แล้ว

$$PV\int_a^b f(t)dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(t)dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t)dt\right] .$$

การพิสูจน์การลู่เข้าและลู่ออกของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ สามารถทำได้โดยใช้อนุกรมอนันต์ ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะตัวทฤษฎีบทต่าง ๆ ส่วนการพิสูจน์ผู้สนใจหาดูได้จากหนังสือแคลคูลัสขั้นสูง และเนื่องจากอินทิกรัลไม่ตรงแบบที่จะกล่าวถึงในบทต่อ ๆ ไป โดยมากจะเป็นชนิดแรก ดังนั้น คุณสมบัติที่จะพิจารณาจึงเป็นชนิดแรกเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.3.1 (เกณฑ์ของโคชี , Cauchy's Criterion)

ถ้า $f(t)$ นิยามได้สำหรับ $t \geq a$ และอินทิเกรตได้บนช่วง $a \leq t \leq x$

สำหรับทุก ๆ x แล้ว $\int_a^{\infty} f(t)dt$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ กำหนด $\varepsilon > 0$

สามารถหาจำนวน $X_0 > a$ ซึ่ง

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x_2 > x_1 > x_0$

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.2

ถ้า $\int_a^\infty \left| f(t) \right| dt$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^\infty f(t)dt$ จะลู่เข้าด้วย

<u>ข้อสังเกต</u>

เราเรียก $\int_a^\infty f(t)dt$ ว่าลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (alsolutely convergence) หรืออินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์ ถ้า $\int_a^\infty \left| f(t)\right| dt$ หาค่าได้

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.3

ถ้าฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ $f(t) \geq 0$ บนช่วง $a \leq t \leq x$ และ $\int_a^x f(t)dt$ มีขอบเขตบน สำหรับทุก x แล้ว $\int_a^\infty f(t)dt$ ลู่เข้า

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.4 (การทดสอบเปรียบเทียบ, Comparison test)

ถ้า $f(t)$ และ $g(t)$ อินทิเกรตได้เมื่อ $t \geq a$ และ $0 \leq f(t) \leq g(t)$ แล้ว

$\int_a^\infty f(t)dt$ ลู่เข้า ถ้า $\int_a^\infty g(t)dt$ ลู่เข้า

$\int_a^\infty g(t)dt$ ลู่ออก ถ้า $\int_a^\infty f(t)dt$ ลู่ออก

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.5 (การทดสอบเปรียบเทียบลิมิต, Limit comparison test)

ถ้าฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ $f(t)$ และ $g(t) \geq 0$ เมื่อ $t \geq a$ และ

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = c \neq 0$$

แล้วอินทิกรัลทั้งคู่

$$\int_a^\infty f(t)dt \quad \text{และ} \quad \int_a^\infty g(t)dt$$

ลู่เข้าหรือลู่ออก

ถ้า $c = 0$ และ $\int_a^\infty g(t)dt$ ลู่เข้า แล้ว $\int_a^\infty f(t)dt$ ลู่เข้าด้วย

ถ้า $c = \infty$ และ $\int_a^\infty g(t)dt$ ลู่ออก แล้ว $\int_a^\infty f(t)dt$ ลู่ออกด้วย

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.6 (การทดสอบดิริคเลต, Dirichlet test)

ถ้า f , g, g' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง , $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, $\int_a^\infty g'(t)dt$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ และ $F(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$ มีขอบเขตสำหรับ $t \geq a$

แล้วอินทิกรัล

$$\int_a^\infty f(t)g(t)dt$$

ลู่เข้า

มีฟังก์ชันที่นิยามในรูปอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ซึ่งมีความสำคัญมากในวิชาเกี่ยวกับการวิเคราะห์ (analysis) และเป็นประโยชน์ในการประยุกต์อย่างยิ่งเช่น

$\int_0^\infty \ell^{-\omega t} \sin t \, dt$ เป็นการกำหนดฟังก์ชัน $F(\omega)$ สำหรับแต่ละ ω ซึ่งอินทิกรัลลู่เข้า จะสังเกตพบว่า อินทิกรัลนี้ลู่เข้าสำหรับทุกค่า $\omega > 0$ และลู่ออกสำหรับ $\omega \leq 0$ โดยอินทิเกรตทีละส่วนสองครั้ง เราได้

$$F(\omega) = \int_0^\infty \ell^{-\omega t} \sin t \, dt = \frac{1}{1+\omega^2}, \ \omega > 0$$

ดังนั้นต่อไปนี้จึงเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันเหล่านี้

<u>บทนิยาม</u> 1.3.1

อินทิกรัล $F(\omega) = \int_a^\infty f(t,\omega)dt$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ (converges uniformly) บนช่วง T เมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวน A, ซึ่งทุก $b > A$ ทำให้อสมการ

$$\left| \int_b^\infty f(t,\omega)dt \right| < \varepsilon$$

เป็นจริง สำหรับทุก ω บน T

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.7 (เกณฑ์ของโคชี)

ถ้า $f(t,\omega)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ $R: a \le t < \infty,\ c \le \omega \le d$ แล้วอินทิกรัล

$\int_a^{\infty} f(t,\omega)dt$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ บน $T = [c,d]$ ก็ต่อเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$

มีจำนวน $t_0 > a$ สามารถกำหนดโดย

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(t,\omega)dt \right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $t_2 > t_1 > t_0$ และ ω บน T

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.8 (Weierstrass' M-test)

ถ้า $f(t,\omega)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ $R: a \le t < \infty,\ c \le \omega \le d$ และมีฟังก์ชัน $M(t)$

ซึ่ง $|f(t,\omega)| \le M(t)$ และ $\int_a^{\infty} M(t)dt$ ลู่เข้า แล้วอินทิกรัล

$$F(\omega) = \int_a^{\infty} f(t,\omega)dt$$

ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ และอย่างสม่ำเสมอบน $T = [c,d]$

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.9 (Abel's test)

ถ้า $f(t,\omega)$ และ $g(t,\omega)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ $R: a \le t < \infty, c \le \omega \le d$

และถ้า $\left| \int_a^{\infty} f(t,\omega)dt \right| < M$ บน R , $\int_a^{\infty} \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t,\omega)dt \right|$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $T=[c,d]$ และ $g(t,\omega)$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอไปยังศูนย์ แล้ว

$$\int_a^{\infty} f(t,\omega)g(t,\omega)dt$$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T

ทฤษฎีบท 1.3.10 (การทดสอบดิริคเลต)

ถ้า $f(t,\omega)$ และ $\frac{\partial g}{\partial t}(t,\omega)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $R: a\leq t<\infty$, $c\leq\omega\leq d$ และถ้า

$$\int_a^{\infty} f(t,\omega)dt$$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน $T = [c,d]$,

$$\int_a^{\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right|dt < M$$ บน T, และ $|g(t,\omega)| < M$ บน T,

แล้วอินทิกรัล $\int_a^{\infty} f(t,\omega)g(t,\omega)dt$ ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T

ทฤษฎีบท 1.3.11

ถ้า $f(t,\omega)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ $R: a\leq t<\infty$, $c\leq\omega\leq d$ แล้วฟังก์ชัน $F(\omega)$ นิยามโดย

$$F(\omega) = \int_a^{\infty} f(t,\omega)\, dt$$

ต่อเนื่องบน $T = [c,d]$ ถ้าอินทิกรัลลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T

ทฤษฎีบท 1.3.12

ถ้า $f(t,\omega)$ ต่อเนื่องบนบริเวณ $R: c\leq\omega\leq d$, $a\leq t<\infty$ และอินทิกรัล

$$F(\omega) = \int_a^{\infty} f(t,\omega)dt$$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T =[c,d] แล้วอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

$$\int_c^d f(\omega)d\omega = \int_a^\infty dt \int_c^d f(t,\omega)d\omega$$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T

<u>ทฤษฎีบท</u> 1.3.13

ถ้า $f(t,\omega)$ และ $f_\omega(t,\omega)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $R: a\leq t<\infty$, $c\leq\omega\leq d$ และถ้าอินทิกรัล

$$f(\omega) = \int_a^\infty f(t,\omega)dt$$

ลู่เข้า และอินทิกรัล

$$\int_a^\infty f_\omega(t,\omega)dt$$

ลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอบน T =[c,d] แล้ว

$$F'(\omega) = \int_a^\infty f_\omega(t,\omega)dt$$

บน T

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ (ถ้าหาค่าได้)

1.1 $\int_{4}^{5} \frac{dt}{\sqrt{t-4}}$

1.2 $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2}$

1.3 $\int_{-2}^{2} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

1.4 $\int_{0}^{\infty} e^{-at}\, dt$, $a>0$

1.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{a^2+t^2}$, $a>0$

2. ค่าของ p ควรเป็นเท่าไร จึงจะทำให้อินทิกรัลไม่ตรงแบบ ต่อไปนี้ลู่เข้า (หาค่าได้)

2.1 $\int_{0}^{1} \frac{dt}{t^p}$

2.2 $\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^p}$

2.3 $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^p}$

คำตอบ

1.

1.1 2

1.2 ลู่ออก

1.3 π

1.4 $\frac{1}{a}$

1.5 $\frac{\pi}{a}$

2.

2.1 $p<1$

2.2 $p>1$

2.3 ไม่มี

1.4 <u>การหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ</u> (Evaluation of Improper Integral)

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบบางชนิด ซึ่งมีวิธีการแตกต่างกันไป สิ่งหนึ่งที่จะนำมาใช้ก็คือ กฎของไลบ์นิตซ์ (Leibnitz's Rule) ซึ่งรายละเอียดดูได้ในภาคผนวก 1 แต่อย่างไรก็ตาม การหาค่าอินทิกรัลเหล่านี้อย่างมีประสิทธิภาพสามารถทำได้โดยใช้อินทิกรัลตามเส้นทาง (Contour integral) ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่งไม่ได้กล่าวในที่นี้

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4.1

$$I = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$$

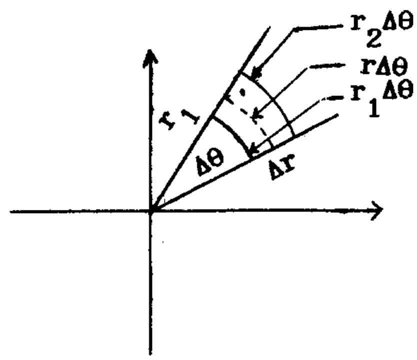
เนื่องจาก t เป็นตัวแปรหุ่น (dummy variable) ดังนั้น

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

เปลี่ยนพิกัดฉาก (x,y) เป็นพิกัดเชิงขั้ว (r,θ)

โดย $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$



$$\Delta A = r\Delta\theta\Delta r$$

โดย $r = \dfrac{r_1+r_2}{2}$

รูป 1.4.1

จะเห็นได้ว่า

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \ell^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} \ell^{-r^2} r dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} \ell^{-r^2} dr^2$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

นั่นคือ

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4.2

$$I = \int_0^{\infty} \ell^{-at} \cos bt \, dt$$

$$= \text{Re} \left[\int_0^{\infty} \ell^{-at} \ell^{ibt} \, dt \right]$$

$$= \text{Re} \left[\frac{1}{a-ib}\right]$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}$$