และจาก $F_1(\omega) = F_2(\omega)$

เพราะฉะนั้น $f_1(t) = f_2(t)$

ยกเว้นจุดที่ไม่ต่อเนื่อง

<u>ข้อสังเกต</u>

ความจริงแล้วผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันไม่ได้มีเพียงฟังก์ชันเดียว แต่ฟังก์ชันเหล่านี้จะต่างกันเฉพาะบางจุดเท่านั้น ซึ่งในการประยุกต์ไม่มีผลกระทบใดๆ เราจึงถือว่ามีฟังก์ชันเดียว

พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f_1(t) = \begin{cases} \ell^{-at} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \; ; \quad a > 0$$

$$f_1(t) = \begin{cases} \ell^{-at} & , \quad t > 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \; ; \quad a > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

จะพบว่า

$$\hat{F}\,[f_1(t)] = \hat{F}\,[f_2(t)] = \frac{1}{a+i\omega}$$

<u>วิธีหาผลการแปลงผกผัน</u> :

อาจหาได้จากนิยามคือ

$$f(t) = \hat{F}^{-1}\,[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ell^{i\omega t}\,d\omega$$

แต่การคำนวณค่าอินทิกรัลยุ่งยาก จึงนิยมใช้ตารางผลการแปลงฟูริเยร์และเทคนิคบางประการ ดังนี้

1. ใช้คุณสมบัติต่าง ๆ ของการแปลงฟูริเยร์ เช่น

1.1 คุณสมบัติเชิงเส้น

จาก

$$\hat{F}\,[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$$

ดังนั้น

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = \hat{F}^{-1}\,[c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)]$$

หรือ

$$\hat{F}^{-1}\,[c_1 F_1 + c_2 F_2] = c_1 f_1 + c_2 f_2$$

1.2 คุณสมบัติสมมาตร

จาก

$$\hat{F}\,[F(-\omega)] = 2\pi f(t)$$

ดังนั้น

$$\hat{F}^{-1}[f] = \frac{1}{2\pi} F(-\omega)$$

1.3 แยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชันตรรกยะของ ω สามารถเขียนในรูปฟังก์ชันตรรกยะของ $i\omega$ ได้ แล้วแยกเศษส่วนย่อย จะได้ฟังก์ชัน $\dfrac{A}{(i\omega-a)^k}$ สำหรับ $k = 1,2,\ldots$ โดย a , A เป็นค่าคงที่ จากนั้นใช้ตาราง 2.3.1 หมายเลข 4 และ 9 จะพบว่า

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{i\omega-a}\right] = \ell^{at}\,u(t)$$

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{(i\omega-a)^2}\right] = t\,\ell^{at}\,u(t)$$

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{(i\omega-a)^k}\right] = \frac{t^{k-1}\,\ell^{at}\,u(t)}{(k-1)!}$$

โดย $Re(a) < 0$

สำหรับกรณีที่ $Re(a) > 0$ เราใช้ตาราง 2.3.1 หมายเลข 6 จะได้

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{(i\omega-a)}\right] = -\ell^{at}\,u(-t)$$

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{(i\omega-a)^k}\right] = \frac{-t^{k-1}\,\ell^{at}\,u(-t)}{(k-1)!}$$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. สำหรับ $Re(a) = 0$ ไม่มีกฎใช้ ซึ่งกรณีนี้ $F(\omega) = \dfrac{1}{(i\omega-a)^k}$ ไม่ต่อเนื่อง สำหรับ $\omega = \dfrac{a}{i}$ (จำนวนจริง) และ $F(\omega)$ ไม่เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้อย่างสัมบูรณ์จาก $-\infty$ ถึง ∞ ดังนั้น จึงไม่มีผลการแปลงผกผัน (แต่สามารถมีได้ในเรื่องของฟังก์ชัน เจนเนอรัลไลซ์ ที่จะกล่าวในหัวข้อ 2.6)

2. **ใช้ผลการประสาน**

จากทฤษฎีบท 2.4.1 และ 2.4.2 เราทราบว่า

$$\hat{F}[f*g] = \hat{F}[f].\hat{F}[g] = F(\omega).G(\omega)$$

และ

$$\hat{F}[f.g] = \frac{\hat{F}[f].\hat{F}[g]}{2\pi} = \frac{F(\omega)*G(\omega)}{2\pi}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\hat{F}^{-1}[F(\omega).G(\omega)] = f*g$$

และ

$$\hat{F}^{-1}[F(\omega)*G(\omega)] = 2\pi.f.g$$

ตัวอย่าง 2.5.1

จงหา $\hat{F}^{-1}[2\ell^{-|\omega|} + 3\ell^{-2|\omega|}]$

ผลเฉลย

จากคุณสมบัติเชิงเส้น

$$\hat{F}^{-1}[2\ell^{-|\omega|} + 3\ell^{-2|\omega|}] = 2\,\hat{F}^{-1}[\ell^{-|\omega|}] + 3\,\hat{F}^{-1}[\ell^{-2|\omega|}]$$

และจากตาราง 2.3.1 หมายเลข 11 , จะได้

$$\hat{F}^{-1}[2\ell^{-|\omega|} + 3\ell^{-2|\omega|}] = 2\,\frac{1/\pi}{1+t^2} + 3\,\frac{2/\pi}{4+t^2}$$

ตัวอย่าง 2.5.2

จงหา $\hat{F}^{-1}\left[\dfrac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\right]$

ผลเฉลย

จากตาราง 2.3.1 หมายเลข 12 , โดยสลับที่ t และ ω

$$\hat{F}\left[\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\right] = \frac{it\pi}{-2}\,\ell^{-|t|}$$

ดังนั้นจากคุณสมบัติ $\hat{F}^{-1}[f] = \dfrac{1}{2\pi}F(-\omega)$ จะได้

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-it\pi}{-2}\,\ell^{-|t|}\right)$$

$$= \frac{it}{4}\,\ell^{-|t|}$$

ตัวอย่าง 2.5.3

จงหา $\hat{F}^{-1}\left[\dfrac{1}{\omega^2+i\omega+2}\right]$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\frac{1}{\omega^2+i\omega+2} = \frac{1}{-(i\omega)^2+i\omega+2} = \frac{-1}{(i\omega-2)(i\omega+2)}$$

$$= \frac{1}{3}\;\frac{1}{i\omega+1} - \frac{1}{3}\;\frac{1}{i\omega-2}$$

ดังนั้น

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+i\omega+2}\right] = \frac{1}{3}\,\ell^{-t}\,u(t) + \frac{1}{3}\,\ell^{2t}\,u(-t)$$

หรือ

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+i\omega+2}\right] = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\ell^{-t} & , \quad t > 0 \\ \\ \frac{1}{3}\,\ell^{2t} & , \quad t < 0 \end{cases}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.5.4

จงหา $\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+ia\omega+b}\right] \quad , \quad b > 0$

<u>ผลเฉลย</u>

เนื่องจาก

$$\frac{1}{\omega^2+ia\omega+b} = \frac{1}{[\omega+\frac{ia}{2}]^2 + (\frac{a^2}{4} + b)}$$

จาก

$$\hat{F}\,[\ell^{-a|t|}] = \frac{a}{a^2+\omega^2} \quad , \quad a > 0$$

ดังนั้น

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{a}{a^2+\omega^2}\right] = \ell^{-a|t|}$$

จากคุณสมบัติ $\hat{F}[\ell^{-ict} f(t)] = F(\omega-c)$

หรือ $\hat{F}^{-1}[F(\omega-c)] = \ell^{-ict} f(t)$

นั่นคือ

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+ia\omega+b}\right] = \ell^{-i(-ia/2)t}\,\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2+\frac{a^2}{4}+b}\right]$$

$$= \ell^{-at/2}\frac{1}{\sqrt{a^2/4+b}}\,\ell^{-\sqrt{a^2/4+b}\,|t|}$$

$$= \frac{\exp[-\frac{1}{2}(at+\sqrt{a^2+4b}\,|t|)]}{\sqrt{a^2+4b}}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 2.5.5

ใช้ทฤษฎีบทผลการประสาน หาผลการแปลงผกผัน $\hat{F}^{-1}[\frac{\sin\omega}{\omega(1-i\omega)}]$

<u>ผลเฉลย</u>

จากทฤษฎีบทผลการแปลงผกผัน

$$\hat{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)] = f*g$$

ดังนั้นเราให้

$$F(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega} \quad \text{และ} \quad G(\omega) = \frac{1}{1-i\omega}$$

ซึ่งเราทราบว่า

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{\sin\omega}{\omega}\right] = \frac{1}{2}u(1-|t|)$$

และ

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{1}{1-i\omega}\right] \ell^{-t}u(t)$$

ดังนั้น

$$\hat{F}^{-1}[\ F(\omega)G(\omega)\ ] = f*g$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \ell^{(t-\tau)}\,u(t-\tau)\,u(1-|\tau|)d\tau$$

เนื่องจาก

$$f(\tau) = \frac{1}{2}u(1-|\tau|) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\tau| < 1 \\ 0, & \tau \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

และ

$$g(t-\tau) = \ell^{-(t-\tau)}u(t-\tau) = \begin{cases} \ell^{-(t-\tau)}, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

ค่าของ $f(\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่ในช่วง $-1 < \tau < 1$ และค่าของ $g(t-\tau)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ อยู่ในช่วง $-\infty < \tau < t$ ดังนั้นลิมิตล่างในการอินทิเกรต คือ $\max(-1, -\infty)$ และ ลิมิตบนในการอินทิเกรต คือ $\min(1, t)$ ซึ่งค่า t แบ่งเป็นช่วง คือ $|t| < 1$, $t > 1$, และ $t < -1$

นั่นคือ

$$\hat{F}^{-1}[F(\omega)\,G(\omega)] = \begin{cases} \frac{1}{2}\ell^{-t}\int_{-1}^{t}\ell^{\tau}\,d\tau, & |t| < 1 \\ \frac{1}{2}\ell^{-t}\int_{-1}^{1}\ell^{\tau}\,d\tau, & t > 1 \\ 0, & t < -1 \end{cases}$$

หรือ

$$\hat{F}^{-1}\left[\frac{\sin \omega}{\omega(1-i\omega)}\right] = \begin{cases} \frac{1}{2}\ (1-\ell^{-(t+1)}) & , \ |t| < 1 \\ \frac{1}{2}\ (\ell-\ell^{-1})\ \ell^{-t} & , \ t > 1 \\ 0 & , \ t < -1 \end{cases}$$

<u>แบบฝึกหัด</u> 2.5

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $\dfrac{\sin 3\omega}{\omega}$

2. $\dfrac{1}{i\omega+2}$

3. $\dfrac{1}{i\omega-3}$

4. $\dfrac{5\omega}{\omega^2+1}$

5. $\dfrac{2}{\omega+1+i} - \dfrac{3}{\omega+1-i}$

6. $\dfrac{5\sin(\omega-\frac{\pi}{3})}{3\omega-\pi} + \dfrac{\sin(\omega-\frac{\pi}{6})}{6\omega-\pi}$

7. $\dfrac{2}{(i\omega-3)^3} - \dfrac{3}{(i\omega+3)^3}$

8. $\dfrac{4}{(\omega-2i)^5} + \dfrac{7}{(\omega-3i)^2}$

9. $\dfrac{i\omega}{(i\omega+4)(i\omega+1)}$

10. $\dfrac{2i\omega+1}{(i\omega+3)(i\omega+2)}$

11. $\dfrac{1}{6\omega^2-13i\omega-6}$

12. $\dfrac{1}{\omega^2-2i\omega-1}$

13. $\dfrac{2}{(i\omega+1)(\omega^2-2i\omega-2)}$

14. $\dfrac{i\omega+2}{i\omega^3+5\omega^2-7i\omega-3)}$

15. $\dfrac{2}{(a+i\omega)(b+i\omega)}$

คำตอบ

$$1 \quad = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -3 < t < 3 \\ 0 & , t \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases} \qquad 3. \quad = \begin{cases} -\ell^{3t} & , t < 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$5. \quad = \begin{cases} -3i\ell^{(1-i)t} & , t < 0 \\ -7i\ell^{(-1-i)t} & , t > 0 \end{cases} \qquad 7. \quad = \begin{cases} -t^2 \ell^{3t} & , t < 0 \\ -5t^2 \frac{\ell^{-3t}}{2} & , t > 0 \end{cases}$$

$$9 \quad = \begin{cases} \frac{1}{3}(4\ell^{-4t} - \ell^{-t}) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$11 \quad = \begin{cases} \frac{1}{5}(\ell^{3\pi/2} - \ell^{-2t/3}) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$13 \quad = \begin{cases} 2\ell^{-t}(\cos t - 1) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$$15 \quad = \frac{\ell^{-bt}}{a-b} + \frac{\ell^{-at}}{b-a} \quad , t > 0$$

2.6 <u>ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันพิเศษ</u>

ฟังก์ชันธรรมดาบางฟังก์ชันไม่สามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้ (ถ้าไม่สอดคล้องทฤษฎีบท 2.2.1) แต่ถ้าเรานำฟังก์ชันเยนเนอรัลไลซ์มาเกี่ยวข้องด้วย จะทำให้หา ผลการแปลงดังกล่าวได้

2.6.1 <u>ฟังก์ชันเดลต้า</u>

จากคุณสมบัติเกี่ยวกับอินทิกรัลของฟังก์ชันเดลต้า ตามหัวข้อ 1.5. ทำให้ได้

$$\hat{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \ell^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

และ

$$\hat{F}[\delta'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= (-1)(-i\omega)\ell^{-i\omega t} \Big|_{t=0}$$

$$= i\omega$$

ดังนั้นในรูปทั่วไปสำหรับ $n = 0,1,2\ldots$

$$\hat{F}[\delta^{(n)}(t)] = (i\omega)^{n} \qquad (2.6.1)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\hat{F}[\delta^{(n)}(t-c)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-c)\ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= (i\omega)^{n}\, \ell^{-i\omega c} \qquad (2.6.2)$$

ตัวอย่าง 2.6.1

$$\hat{F}[\ell^{-t}u(t)+3\delta(t)+2\delta'(t-1)] = \frac{1}{i\omega + 1} + 3 + 2i\omega\ell^{-i\omega}$$

เราสามารถขยายผลการแปลงฟูริเยร์ไปยังฟังก์ชันใหม่โดยใช้คุณสมบัติต่าง ๆ ที่เคยกล่าวมาแล้วดังนี้

จาก $\delta(t)$ เป็นฟังก์ชันคู่ และจาก $\hat{F}[F(\omega)] = 2\pi f(-t)$

ดังนั้น

$$\hat{F}[1] = \hat{F}\left[\hat{F}[\delta(t)]\right] = 2\pi\delta(-t) = 2\pi\delta(t)$$

ถ้าสลับที่ระหว่าง t กับ ω จะได้

$$\hat{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

ทำนองเดียวกัน จาก $\delta'(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ และจาก $\hat{F}[\delta'(t)] = i\omega$

หรือ $\hat{F}[\delta'(\omega)] = it$

ดังนั้น

$$\hat{F}[it] = \hat{F}\left[\hat{F}[\delta'(\omega)]\right] = 2\pi\delta'(-\omega) = -2\pi\delta'(\omega)$$

หรือ

$$\hat{F}[t] = 2\pi i\delta'(\omega)$$

และโดยทั่ว ๆ ไป จะพบว่า

$$\hat{F}[t^n] = 2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega) \text{ ,}(n = 0,1,2,\ldots) \qquad (2.6.3)$$

$$\hat{F}[t^n\ell^{-ict}] = 2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega+c),(n = 0,1,2,\ldots) \quad (2.6.4)$$

ข้อสังเกต

ฟังก์ชัน 1, $t_1 \ldots . t^n, \ldots\ldots, t^n\ell^{-ict}$ โดยปกติแล้วไม่สามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้ อย่างไรก็ตามในแง่ของฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์ เราสามารถหาผลการแปลงได้

2.6.2 ฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย

เราสามารถขยายการหาผลการแปลงให้กว้างออกไปได้อีก โดยการนิยาม $\hat{F}[u(t-c)]$ ให้เหมาะสม ก่อนอื่น เราให้ $c = 0$ และพิจารณา $\hat{F}[u(t)] = F(\omega)$ จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.3.6 จะได้ $\hat{F}[u(-t)] = F(-\omega)$ เนื่องจาก

$$u(t) + u(-t) \underline{=} 1 \quad (\text{ยกเว้น ที่ } t = 0)$$

ดังนั้น

$$\hat{F}[u(t) + u(-t)] = \hat{F}[1]$$

$$F(\omega) + F(-\omega) = 2\pi\, \delta(\omega)$$

เราสมมุติว่า $\hat{F}[u(t)] = F(\omega)$ อยู่ในรูป $G(\omega) + a\,\delta(\omega)$ โดย $G(\omega)$ เป็นฟังก์ชันธรรมดา, เนื่องจาก $\delta(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคู่

$$\begin{aligned} F(\omega) + F(-\omega) &= G(\omega) + a\delta(\omega) + G(-\omega) + a\delta(-\omega) \\ &= G(\omega) + G(-\omega) + 2a\delta(\omega) \\ &= 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

เราสรุปได้ว่า $a = \pi$ และ $G(\omega)$ เป็นฟังก์ชันคี่

ต่อไปจะหา $G(\omega)$, จากคุณสมบัติ $\hat{F}[f'(t)] = i\omega\hat{F}[f(t)] = i\omega F(\omega)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \hat{F}[u'(t)] = \hat{F}[\delta(t)] &= 1 \\ &= i\omega F(\omega) = i\omega[G(\omega) + \pi\,\delta(\omega)] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\omega\delta(\omega) = 0$ ดังนั้น $i\omega\, G(\omega) = 1$

นั่นคือ

$$G(\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

เพราะฉะนั้น

$$F(\omega) = \hat{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad (2.6.5)$$

สมการนี้เป็นนิยามของผลการแปลงฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วย โดยพจน์ $\frac{1}{i\omega}$ ไม่ต่อเนื่อง ที่ $\omega = 0$

ถ้าใช้คุณสมบัติ $\hat{F}\left[\hat{F}[f]\right] = 2\pi\, f(-t)$ กับสมการ(2.6.5)แล้ว จะได้

$$\hat{F}\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right] = \hat{F}\left[\hat{F}[u(t)]\right] = 2\pi\, u(-t)$$

เนื่องจาก $\hat{F}[\pi(\omega)] = \pi\cdot 1$ ดังนั้น

$$\hat{F}[\frac{1}{i\omega}] = 2\pi u(-t) - \pi = \pi - 2\pi u(t)$$

ซึ่งเครื่องหมายเท่ากับสุดท้ายของสมการ จะยกเว้นกรณี $t = 0$

โดยเปลี่ยนตัวแปร t กับ ω จะได้

$$\hat{F}[\frac{1}{t}] = \pi i - 2\pi\, iu(\omega) \qquad (2.6.6)$$

จากทฤษฎีบท 2.3.3 จะได้

$$\hat{F}[u(t-c)] = \ell^{-i\omega c}\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= \frac{\ell^{-i\omega c}}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \qquad (2.6.5')$$

$$\hat{F}\left[\frac{1}{t-c}\right] = \ell^{-i\omega c}\,[\pi i - 2\pi iu(\omega)] \qquad (2.6.6')$$

จากทฤษฎีบท 2.3.4 จะได้

$$\hat{F}[\ell^{i\alpha t}u(t-c)] = \frac{\ell^{-ic(\omega-\alpha)}}{i(\omega-\alpha)} + \pi\delta(\omega-\alpha) \qquad (2.6.5'')$$

$$\hat{F}[\frac{\ell^{\alpha t}}{t-c}] = \ell^{-ic(\omega-\alpha)}[\pi i - 2\pi i\; u(\omega-\alpha)] \qquad (2.6.6'')$$

และจากทฤษฎีบท 2.3.9 จะได้

$$\hat{F}[-\frac{1}{t^2}] = i\omega[\pi i - 2iu(\omega)]$$

$$\hat{F}[\frac{2}{t^3}] = (i\omega)^2[\pi i - 2iu(\omega)],$$

และกรณีทั่ว ๆ ไป $n = 1,2,\ldots$

$$\hat{F}[\frac{1}{t^n}] = \frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}\,[\pi i - 2iu(\omega)] \qquad (2.6.7)$$

ตาราง 2.6.1

ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์

	$f(t)$	$F(\omega)=\hat{F}[f]$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\delta(t-c)$	$e^{-ic\omega}$
3.	$\delta^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n$
4.	$\delta^{(n)}(t-c)$	$e^{-ic\omega}(i\omega)^n$
5.	1	$2\pi\delta(\omega)$
6.	t	$2\pi i\delta'(\omega)$
7.	t^n	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
8.	e^{iat}	$2\pi\delta(\omega-a)$
9.	$t^n e^{iat}$	$2\pi i^n\delta^{(n)}(\omega-a)$
10.	$u(t)$	$\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
11.	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n\delta^{(n)}(\omega)$
12.	$u(t-c)$	$\frac{e^{-i\omega c}}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
13.	$(t-c)^n u(t-c)$	$\frac{n!e^{-ic\omega}}{(i\omega)^{n+1}} + \pi i^n \sum_{r=o}^{n} \binom{n}{r}(ic)^{n-r}\delta^{(r)}(\omega)$

ตาราง 2.6.1

ผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันเจนเนอรัลไลซ์

	$f(t)$	$F(\omega) = \hat{F}[f]$
14.	$e^{iat}u(t-c)$	$\frac{e^{-ic(\omega-a)}}{i(\omega-a)} + \pi\delta(\omega-a)$
15.	$e^{iat}t^{n}u(t)$	$\frac{n!}{[i(\omega-a)]^{n+1}} + \pi i^{n}\delta^{(n)}(\omega-a)$
16.	$e^{iat}(t-c)^{n}u(t-c)$	$\frac{n!e^{-ic(\omega-a)}}{[i(\omega-a)]^{n+1}} + \pi i^{n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$ $\times\ (ic)^{n-r}\delta^{(r)}(\omega-a)$
17.	$\frac{1}{t}$	$\pi i - 2\pi i u(\omega)$
18.	$\frac{1}{t^{n}}$	$\frac{(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}[\pi i - 2\pi i u(\omega)]$
19.	$\frac{1}{t-c}$	$e^{-ic\omega}[\pi i - 2\pi i u(\omega)]$
20.	$\frac{1}{(t-c)^{n}}$	$\frac{e^{-ic\omega}(-i\omega)^{n-1}}{(n-1)!}[\pi i - 2\pi i u(\omega)]$
21.	$\frac{e^{-iat}}{t-c}$	$e^{-ic(\omega-a)}[\pi i - 2\pi i u(\omega-a)]$
22.	$\frac{e^{iat}}{(t-c)^{n}}$	$\frac{e^{-ic(\omega-a)}[-i(\omega-a)]^{n-1}}{(n-1)!}[\pi i - 2\pi i u(\omega-a)]$

$n = 1,2,3,\ldots,$ และ c กับ a เป็นค่าจริง

ตัวอย่าง 2.6.2

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(t) = \ell^{t} [u(t)-u(t-1)]$

2. $f(t) = \ell^{5t}u(-t)+\ell^{-t}u(t)$

3. $f(t) = u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$

ผลเฉลย

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันขั้นบันไดหนึ่งหน่วยตามหัวข้อ 1.5 จะพบว่าทุก ๆ ฟังก์ชันข้างต้นสามารถหาผลการแปลงฟูริเยร์ได้

1. $f(t) = \ell^{t} [u(t)-u(t-1)]$

ดังนั้น

$$\hat{F}[f(t)] = \int_{0}^{1} \ell^{t}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{1-i\omega}\left(\ell^{1-i\omega} - 1\right)$$

2. $f(t) = \ell^{5t} u(-t)+\ell^{-t}u(t]$

ดังนั้น

$$\hat{F}[f(t) = \int_{-\infty}^{0} \ell^{5t}\, \ell^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} \ell^{-t}\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{5-i\omega}(1-0) + \frac{1}{-1-i\omega}(0-1)$$

$$= \frac{1}{5-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}$$

$$= \frac{6}{(5-i\omega)(1+i\omega)}$$

3. $f(t) = u(t+1)-2u(t)+u(t-1)$

ดังนั้น

$$\hat{F}[f(t) = \int_{-1}^{0} \ell^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} (-1)\, \ell^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{i\omega}(1-\ell^{i\omega}) + \frac{1}{i\omega}(\ell^{-i\omega}-1)$$

$$= \frac{-2}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}(\ell^{i\omega} + \ell^{-i\omega})$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left\{ -2+2\cos\omega \right\}$$

$$= \frac{-4\sin^2 \omega/2}{i\omega} = i\omega\left(\frac{\sin \omega/2}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$$

<u>ข้อสังเกต</u>

สำหรับข้อ 3 เราสามารถให้ $\hat{F}[u(t)]$ หาผลเฉลยได้ เนื่องจาก

$$\hat{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

และจากคุณสมบัติ $\hat{F}[f(t-c)] = \ell^{-i\omega c}\, F(\omega)$

ดังนั้นจะได้

$$\hat{F}[u(t+1)] = \ell^{i\omega}\left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right\}$$

$$\hat{F}[u(t-1)] = \ell^{-i\omega}\left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right\}$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{F}[f(t)] = \hat{F}[u(t+1)] - 2\hat{F}[u(t)] + \hat{F}[u(t-1)]$$

$$= \ell^{i\omega}\left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right\} - 2\omega\left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right\} + \ell^{-i\omega}\left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right\}(\ell^{i\omega} + \ell^{-i\omega} - 2)$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left\{-2+\ell^{i\omega}+\ell^{-i\omega}\right\}+\pi\delta(\omega)\left\{-2+\ell^{i\omega}+\ell^{-i\omega}\right\}$$

$$= \frac{1}{i\omega}\left\{-2+2\cos\omega\right\}+\pi\delta(\omega)\left\{-2+2\cos\omega\right\}$$

จากคุณสมบัติ $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ ดังนั้น $\pi\delta(\omega)\{-2+2\cos\omega\} = 0$

ตัวอย่าง 2.6.3

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = tu(t)$

ผลเฉลย

เนื่องจาก

$$\hat{F}[u(t)] = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$$

จากคุณสมบัติตามทฤษฎีบท 2.3.10

$$\hat{F}[tu(t)] = -\frac{1}{i}\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

$$= -\frac{1}{i}\left[\frac{1}{i\omega^2} + \pi\delta'(\omega)\right]$$

$$= \pi i\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$$

ตัวอย่าง 2.6.3

จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของ $f(t) = sgn(t)$

ผลเฉลย

จากแบบฝึกหัด 1.5 ข้อ 5 จะพบว่า

$$sgn(t) = 2u(t) - 1$$

ดังนั้น

$$\hat{F}[sgn(t)] = 2\hat{F}[u(t)] - \hat{F}[1]$$

จากตารางหมายเลข 2.6.1 หมายเลข 5 และ 10 จะได้

$$\hat{F}[sgn(t)] = 2\left(\frac{i}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - 2\pi\delta(\omega)$$

$$= \frac{2}{i\omega}$$

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหาผลการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $1 - 2\delta(t) + 3\delta'(t-1)$

   1.2 $\cos 5t$

   1.3 $\sin^3 t$

   1.4 $u(t+\frac{1}{2}) - u(t-\frac{1}{2})$

   1.5 $\ell^{-\alpha t} \cos \beta t\, u(t)$ (แนะนำ : ใช้ทฤษฎีบท 2.4.2)

2. จงแสดงว่า $\hat{F}[f'] = i\omega \hat{F}[t]$ เมื่อกำหนดฟังก์ชันดังนี้

   2.1 $\ell^{-t} u(t)$

   2.2 $t[u(t) - u(t-1)]$

3. จงแสดงว่า $\hat{F}[f(t-c)] = \ell^{-i\omega c} \hat{F}[f]$ สำหรับหมายเลขต่อไปนี้ในตาราง 2.6.1

   3.1 หมายเลข 8

   3.2 หมายเลข 7

คำตอบ

1.

   1.1 $2\pi\delta(\omega) - 2+3i\omega\ell^{-i\omega}$

   1.2 $\pi[\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)]$

   1.3 $\frac{\pi i}{4}[\delta(\omega-3) - 3\delta(\omega-1) + 3\delta(\omega+1) - \delta(\omega+3)]$

   1.4 $\frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}$

   1.5 $\frac{i\omega + 2}{(\alpha+i\omega)^2+\beta^2}$