บทที่ 3
อนุกรมของจำนวนจริง
(The Series of Real Numbers)

3.1 นิยามและคุณสมบัติทั่วไป

นิยาม 3.1 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง อนุกรมอนันต์ (infinite series) หรือเรียกง่าย ๆ ว่า อนุกรม (series) คือ ลำดับ $S = (s_n)$ โดยที่

$$s_1 = x_1$$
$$s_2 = x_1 + x_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

ถ้า S เป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) เรากล่าวว่าอนุกรมอนันต์ลู่เข้า (an infinite series converges) และ lim S คือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ (the sum of the infinite series)

เรียก x_n ว่า เทอม (terms) และ s_n ว่าผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรมอนันต์

เพื่อความสะดวกโดยทั่วไป เขียน $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ หรือ Σx_n แทนอนุกรมอนันต์ S

และถ้า $\lim S = s$ แล้วจะเขียนว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ หรือ $\Sigma x_n = s$

ถ้า S เป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence) เรากล่าวว่าอนุกรมอนันต์ลู่ออก (diverges)

ทฤษฎีบท 3.1 อนุกรม Σx_n ลู่เข้าก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนนับ M ได้ซึ่ง ถ้า n เป็นจำนวนนับ และ $n \geq M$ แล้ว $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ p ใด ๆ

พิสูจน์ กำหนด อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ให้ $s_1 = x_1$

$s_2 = x_1 + x_2$

....

....

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

....

ดังนั้น ลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า

กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.20 $S = (s_n)$ เป็นลำดับโคชี

นั่นคือสามารถหาจำนวนนับ M ได้ ซึ่งถ้า n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n, m \geq M$ แล้ว

$$| s_m - s_n | < \varepsilon$$

นั่นคือ ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq M$ แล้ว

$$| s_{n+p} - s_n | = | \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

ในทางกลับกัน กำหนด $\varepsilon > 0$

สามารถหาจำนวนนับ M ได้ ซึ่ง ถ้า $n \geq M$ แล้ว

$$| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

นั่นคือ ถ้า n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $m > n \geq M$ แล้ว

$$| s_m - s_n | = | \sum_{k=n+1}^{n+(m-n)} x_k | < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้นลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับโคชี และโดยทฤษฎีบท 2.22 $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า

นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าแล้ว $\lim x_n = 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะมีจำนวนนับ M ซึ่งถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq M$ แล้ว

$$| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

ให้ $p = 1$ จะได้ $| x_{n+1} | < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq M$

นั่นคือ $\lim x_n = 0$

#

หมายเหตุ 1. สำหรับ อนุกรม Σx_n ใด ๆ ถ้า $\lim x_n \neq 0$ แล้ว สามารถสรุปได้ทันทีว่า อนุกรม Σx_n ลู่ออก

2. สำหรับ อนุกรม Σx_n ใด ๆ ถ้า $\lim x_n = 0$ แล้ว ไม่จำเป็นที่อนุกรม Σx_n จะเป็นอนุกรมลู่เข้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1 อนุกรม ฮาร์โมนิค (Harmonic Series) $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim \frac{1}{n} = 0$ จึงยังสรุปไม่ได้ว่า อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

สำหรับ จำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

เลือก $k_1 = 2$ นั่นคือ $s_{k_1} = 1 + \frac{1}{2}$

$k_2 = 2^2$ นั่นคือ $s_{k_2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_{k_1} + 2(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2}$

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ r

$s_{k_m} > 1 + \frac{m}{2}$ ทุกจำนวนนับ m ซึ่ง $1 \leq m < r$

และ $s_{k_r} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^r} > s_{k_{r-1}} + 2^{r-1}\left(\frac{1}{2^r}\right)$

$= s_{k_{r-1}} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{r}{2}$

นั่นคือ $s_{k_n} > 1 + \frac{n}{2}$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า (s_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะได้ว่ามีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $|s_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $M - 1 < n_0$

ดังนั้น $s_{k_{2n_0}} > 1 + \frac{2n_0}{2} = 1 + n_0 > M$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ลำดับ (s_n) เป็นลำดับที่ ไม่มีขอบเขต

โดยผลของทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ (s_n) เป็นลำดับลู่ออก

นั่นคืออนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

#

ตัวอย่าง 3.2 ให้ r เป็นจำนวนจริง อนุกรม Σr^{n-1} เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)

และอนุกรม Σr^{n-1} ลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

นอกจากนั้น ถ้า อนุกรมเรขาคณิต Σr^{n-1} ลู่เข้าแล้วจะได้ว่า

$$\Sigma r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

พิสูจน์ ให้

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + r$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n = 1 + r + \ldots + r^{n-1}$$

ถ้า $r \neq 1$ จากตัวอย่าง *1.3* ได้ว่า $s_n = \frac{1-r^n}{1-r}$

ดังนั้น ถ้า $|r| < 1$ เนื่องจาก $|r^n| = |r|^n = ||r|^n|$ ทุกจำนวนนับ n

และโดยตัวอย่าง 2.9 ได้ว่า $\lim r^n = 0$

นั่นคือ ถ้า $|r| < 1$ $\quad \lim s_n = \lim \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

เพราะฉะนั้น อนุกรม Σr^{n-1} ลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และ $\Sigma r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$

สมมุติ $|r| \geq 1$ ถ้า $\lim r^n$ หาค่าได้แล้ว $\lim r^n \neq 0$ เนื่องจาก $|r^n| \geq 1$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น โดยผลของทฤษฎีบท 3.2 อนุกรม Σr^{n-1} ลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

#

ตัวอย่าง 3.3 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เรียกว่า อนุกรมพี (p-series)

ก. ถ้า $0 < p \leq 1$ แล้วอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก

ข. ถ้า $p > 1$ แล้ว อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า

พิสูจน์ ก. ถ้า $0 < p \leq 1$ แล้ว $n^p \leq n$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ ทุกจำนวนนับ n

โดยตัวอย่าง 3.1 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

และเนื่องจากลำดับของผลบวกย่อย ของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ต้องเป็นลำดับไม่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตด้วย

และเนื่องจากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก

ข. กำหนด $p > 1$

ให้ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$

เนื่องจาก $\frac{1}{n^p} > 0$ ทุกจำนวนนับ n จึงได้ว่า $S = (s_n)$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

จะแสดงว่า $S = (s_n)$ มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ให้ $r_1 = 2^1 - 1 = 1$ ดังนั้น $s_{r_1} = 1$

$r_2 = 2^2 - 1 = 3$ ดังนั้น $s_{r_2} = 1 + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$

$r_3 = 2^3 - 1 = 1$ ดังนั้น $s_{r_3} = s_{r_2} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}$

$$< s_{r_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

ให้ $a = \frac{1}{2^{p-1}}$ เนื่องจาก $p > 1$ จะได้ว่า $0 < a < 1$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า $r_k = 2^k - 1$ แล้ว

$$0 < s_{r_k} < 1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1}$$

เนื่องจาก อนุกรม Σa^{n-1} เป็นอนุกรมเรขาคณิต โดยที่ $|a| < 1$

จะได้ $\Sigma a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$

นั่นคือ $0 < s_{r_k} < 1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1} \le \frac{1}{1-a}$ ทุกจำนวนนับ k

เพราะฉะนั้น (s_{r_k}) เป็นลำดับย่อยของ (s_n) ที่มีขอบเขต ซึ่งจะทำให้ได้ว่า ลำดับ (s_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย เนื่องจาก $k \le r_k$ ทุกจำนวนนับ k ดังนั้น $0 \le s_k \le s_{r_k} \le \frac{1}{1-a}$ ทุกจำนวนนับ k

นั่นคือ (s_n) เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 2.13 (s_n) เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า #

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนด Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมของจำนวนจริง
ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ก. ถ้า Σx_n และ Σy_n ลู่เข้าแล้ว $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่เข้าด้วย และ

$$\Sigma (x_n + y_n) = \Sigma x_n + \Sigma y_n$$

ข. ถ้า Σx_n ลู่เข้าแล้ว Σcx_n ลู่เข้าด้วย และ

$$\Sigma cx_n = c\,\Sigma x_n$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยง่าย โดยอาศัยทฤษฎีบท 2.5

\#

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าและอนุกรม Σy_n ลู่ออกแล้วอนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่ออก

พิสูจน์ กำหนดอนุกรม Σx_n ลู่เข้า และอนุกรม Σy_n ลู่ออก
สมมุติว่าอนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่เข้า

เนื่องจาก Σx_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3 (ข) อนุกรม $\Sigma (-1)\, x_n$ ลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3 (ก)

$$\Sigma y_n = \Sigma \left((x_n + y_n) + (-1)\, x_n \right)$$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ซึ่งขัดแย้งกับกำหนดให้

นั่นคือ อนุกรม $\Sigma(x_n + y_n)$ ลู่ออก

\#

หมายเหตุ ถ้าอนุกรม Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมลู่ออกแล้วไม่จำเป็นที่อนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ต้องเป็นอนุกรมลู่ออก

เช่น ให้ Σx_n เป็นอนุกรมที่ $x_n = 1$ ทุกจำนวนนับ n และ Σy_n เป็นอนุกรมที่ $y_n = -1$ ทุกจำนวนนับ n

จะเห็นว่าทั้ง Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\Sigma (x_n + y_n) = 0$

\#

3.1.1 อนุกรมที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ (Series with Nonnegative Terms)

ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้กล่าวถึงการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนด Σx_n เป็นอนุกรมที่แต่ละเทอมมีค่าไม่เป็นลบ จะได้ว่า
อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $S = (s_n)$ ของอนุกรม Σx_n เป็นลำดับที่มีขอบเขต

พิสูจน์ เนื่องจาก $x_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า $S = (s_n)$ เป็นลำดับทางเดียว ค่าเพิ่มขึ้น

โดยทฤษฎีบท 2.13 $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ S เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $S = (s_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

#

ทฤษฎีบท 3.6 การทดสอบแบบเปรียบเทียบ (Comparison Test)
กำหนด Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรม ที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ และ $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ n
ถ้า Σy_n ลู่เข้าแล้ว Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม Σx_n
และ $T = (t_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม Σy_n

เนื่องจาก $x_n \ge 0$ และ $y_n \ge 0$ ทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า $S = (s_n)$ และ $T = (t_n)$ เป็นลำดับทางเดียวค่าเพิ่มขึ้น

และเพราะว่า $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ n ดังนั้น $s_n \le t_n$ ทุกจำนวนนับ n
ถ้า Σy_n ลู่เข้า จะได้ลำดับ $T = (t_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า
โดยทฤษฎีบท 2.15 ลำดับ $T = (t_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต
นั่นคือลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย
โดยทฤษฎีบท 2.15 ลำดับ $S = (s_n)$ ลู่เข้า
นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.4 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n!}$ ลู่เข้า

พิสูจน์ เนื่องจาก $n! \ge 2^{n-1}$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต และ $\frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}}$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n!}$ ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.5 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

พิสูจน์ เพราะว่า $\sqrt{n} \le n$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ ทุกจำนวนนับ n

สมมุติ $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม $\Sigma\frac{1}{n}$ ลู่เข้าด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ $\Sigma\frac{1}{n}$ ลู่ออกตามตัวอย่าง 3.1

ดังนั้น อนุกรม $\Sigma\frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

#

ทฤษฎีบท 3.7 การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต (Limit Comparison Test) กำหนด (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับ โดยที่ $x_n > 0$ และ $y_n > 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ก. ถ้า $\lim\frac{x_n}{y_n} \neq 0$ แล้ว อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ Σy_n ลู่เข้า

ข. ถ้า $\lim\frac{x_n}{y_n} = 0$ และอนุกรม Σy_n ลู่เข้าแล้วอนุกรม Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ ก. เนื่องจาก $\lim\frac{x_n}{y_n} \neq 0$ ดังนั้น $\lim\frac{y_n}{x_n}$ หาค่าได้

โดยทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ และลำดับ $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $M_1 > 0$ และ $M_2 > 0$ ซึ่ง $0 < \frac{x_n}{y_n} \leq M_1$ และ

$0 < \frac{y_n}{x_n} \leq M_2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $0 < \alpha y_n \leq x_n \leq \beta y_n$ เมื่อ $\alpha = \frac{1}{M_2}$ และ $\beta = M_1$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.6 $\Sigma \alpha y_n$ ลู่เข้า

และโดยทฤษฎีบท 3.3 อนุกรม $\Sigma y_n = \Sigma\frac{1}{\alpha}(\alpha y_n)$ ลู่เข้า

ถ้าอนุกรม Σy_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3 $\Sigma\beta y_n$ ลู่เข้าด้วย ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. กำหนด $\lim\frac{x_n}{y_n} = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $0 < \frac{x_n}{y_n} \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $0 < x_n \leq My_n$ ทุกจำนวนนับ n
ถ้าอนุกรม Σy_n ลู่เข้าแล้วอนุกรม ΣMy_n ลู่เข้าด้วย
โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.6 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่เข้า

วิธีทำ ให้ (a_n) เป็นลำดับโดยที่ $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

และ (b_n) เป็นลำดับโดยที่ $b_n = \frac{1}{n}$

ดังนั้น $\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

และ $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$

เนื่องจากอนุกรม $\Sigma b_n = \Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 3.7 อนุกรม $\Sigma a_n = \Sigma \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ลู่ออก

#

2. จงแสดงว่า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ลู่ออก

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3n + 2}$

6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$

7. $\sum \frac{3^n + 4^n}{5^n}$

8. $\sum \frac{1}{2 + 3n^2}$

9. $\sum \frac{1+n}{2 + 3n^2}$

10. $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

11. $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

12. $\sum 2^{-\frac{1}{n}}$

13. $\sum (n(n+1))^{-\frac{1}{2}}$

14. $\sum (n^2 (n+1))^{-\frac{1}{2}}$

15. $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$