บทที่ 5
ตัวแกว่งกวัดในสามมิติ

5.1 ทฤษฎีตัวแกว่งกวัดแผนเดิม

ให้มวลขนาด m_0 ถูกกระทำด้วยแรง

$$\overline{F} = -(k_x x\hat{i} + k_y y\hat{j} + k_z z\hat{k}) \tag{5-1}$$

ซึ่งอาจจะเขียนเป็นสมการของแรงตามแนวพิกัดฉากได้ดังนี้

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= -k_x x \\ m_0\ddot{y} &= -k_y y \\ m_0\ddot{z} &= -k_z z \end{aligned} \tag{5-2}$$

ทำให้อาจจะเขียนผลเฉลยของสมการชุด (5-2) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega_x t + \delta_x) \\ y &= y_0 \cos(\omega_y t + \delta_y) \\ z &= z_0 \cos(\omega_z t + \delta_z) \end{aligned} \tag{5-3}$$

จากสมการชุด (5-3)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_x x_0 \sin(\omega_x t + \delta_x) \\ \dot{y} &= -\omega_y y_0 \sin(\omega_y t + \delta_y) \\ \dot{z} &= -\omega_z z_0 \sin(\omega_z t + \delta_z) \\ \dot{x}^2 &= \omega_x^2 x_0^2 \sin^2(\omega_x t + \delta_x) \end{aligned}$$

$$\dot{y}^2 = \omega_y^2 y_0^2 \sin^2(\omega_y t - \delta_y)$$

$$\dot{z}^2 = \omega_z^2 z_0^2 \sin^2(\omega_z t + \delta_z)$$

$$T = \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 \{\omega_x^2 x_0^2 \sin^2(\omega_x t + \delta_x) + \omega_y^2 y_0^2 \sin^2(\omega_y t + \delta_y) + \omega_z^2 z_0^2 \sin^2(\omega_z t + \delta_z)\} \quad (5\text{-}4)$$

จากสมการชุด (5-2) และ (5-3)

$$V(r) = \frac{1}{2} (k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2)$$

$$= \frac{1}{2} \{k_x x_0^2 \cos^2(\omega_x t + \delta_x) + k_y y_0^2 \cos^2(\omega_y t + \delta_y) + k_z z_0^2 \cos^2(\omega_z t + \delta_z)\} \quad (5\text{-}5)$$

เมื่อ

$$k_x = m_0 \omega_x^2$$

$$k_y = m_0 \omega_y^2 \quad (5\text{-}6)$$

$$k_z = m_0 \omega_y^2$$

Lagrangian : $L = T - V$

$$= \frac{1}{2} m_0 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} m_0 (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (5\text{-}7)$$

โมเมนตัมทั่วไป :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_0 \dot{x} = p_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m_0 \dot{y} = p_y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m_0 \dot{z} = p_z$$

ตัวแปรบังคับรูป : p_x, p_y, p_z, x, y, z

ฟังก์ชันแฮมมิลโทเนียน : $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$

$$= \frac{p_x^2}{2m_0} + \frac{p_y^2}{2m_0} + \frac{p_z^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 (\omega_z^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (5\text{-}8)$$

เนื่องจากตัวแกว่งกวัดในสามมิติเป็นระบบอนุรักษ์ ทำให้

$$H = E \quad : \text{ พลังงานทั้งหมดของระบบ} \tag{5-9}$$

5.2 สมการคลื่นและผลเฉลย

สมการชโรดิงเจอร์สำหรับตัวแกว่งกวัดในสามมิติอาจจะเขียนได้ดังนี้

$$H\Psi = E\Psi \tag{5-10}$$

ทำให้

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi + \frac{1}{2}m_0(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)\Psi = E\Psi$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi - \left(\frac{m_0^2}{\hbar^2}(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2)-\frac{2m_0E}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{5-11}$$

ให้

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_x^2 &= \frac{m_0^2}{\hbar^2}\omega_x^2 \\
\alpha_y^2 &= \frac{m_0^2}{\hbar^2}\omega_y^2 \\
\alpha_z^2 &= \frac{m_0^2}{\hbar^2}\omega_z^2 \\
E_x+E_y+E_z &= \frac{2m_0E}{\hbar^2}
\end{aligned}\right| \tag{5-12}$$

ให้

$$\Psi(\bar{r}) = \underline{X}(x)\,\underline{Y}(y)\,\underline{Z}(z) \tag{5-13}$$

แทนค่าสมการที่ (5-12) และ (5-13) ลงในสมการที่ (5-11) แล้วหารตลอดด้วย $\Psi(\bar{r})$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X - (\alpha_x^2-E_x) + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - (\alpha_y^2-E_y) + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z - (\alpha_z^2-E_z) = 0 \tag{5-14}$$

สมการที่ (5-14) อาจจะแยกออกได้เป็นสามสมการคือ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X - (\alpha_x^2 - E_x)X &= 0\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}Y - (\alpha_y^2 - E_y)Y &= 0\\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}Z - (\alpha_z^2 - E_z)Z &= 0\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

สมการชุด (5-15) คือ สมการคลื่น (3-13) ทำให้เราสามารถเขียนผลเฉลยได้ทันที จากสมการ (3-22) ดังนี้

$$X(x) = \frac{(m\omega_x)^{1/4}}{(2^{n_x}n_x!\sqrt{\pi\hbar}^{1/2}} e^{-\left(\frac{m_0\omega_x}{\hbar}\right)\frac{x^2}{2}} Hn_x\left\{\left(\frac{m_0\omega_x}{\hbar}\right)^{1/2}x\right\} \tag{5-16}$$

และเช่นเดียวกับสมการที่ (3-23)

$$\left.\begin{aligned}E_x &= \frac{2m_0}{\hbar}(n_x+\tfrac{1}{2})\omega_x\\ E_y &= \frac{2m_0}{\hbar}(n_y+\tfrac{1}{2})\omega_y\\ E_z &= \frac{2m_0}{\hbar}(n_z+\tfrac{1}{2})\omega_z\end{aligned}\right\} \tag{5-17}$$

ทำให้พลังงานทั้งหมด (จากชุดสมการ (5-12))

$$E = E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{2m_0}{\hbar}\right)\left\{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\omega_x + \left(n_y+\frac{1}{2}\right)\omega_y + \left(n_z+\frac{1}{2}\right)\omega_z\right\}$$

$$= \hbar\left\{\left(n_x+\frac{1}{2}\right)\omega_x + \left(n_y+\frac{1}{2}\right)\omega_y + \left(n_z+\frac{1}{2}\right)\omega_z\right\} \tag{5-18}$$

และจากสมการที่ (5-13) สมการคลื่นอาจเขียนได้ดังนี้

$$\Psi(\bar{r}) = C_{n_x n_y n_z}\, e^{-\frac{m_0}{2\hbar}(\omega_x x^2+\omega_y y^2+\omega_z z^2)}$$

$$H_{n_x}\left\{\left(\frac{m_0\omega_x}{\hbar}\right)^{1/2}x\right\}H_{n_y}\left\{\left(\frac{m_0\omega_y}{\hbar}\right)^{1/2}y\right\}H_{n_z}\left\{\left(\frac{m_0\omega_z}{\hbar}\right)^{1/2}z\right\} \qquad (5\text{-}19)$$

โดยที่ $$C_{n_x n_y n_z} = \frac{(h)^{3/4}}{\left(2^{(n_x+n_y+n_z)}\, n_x!\,n_y!\,n_z!\,(\pi m_0)^{3/2}\,(\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/2}\right)^{1/2}} \qquad (5\text{-}20)$$

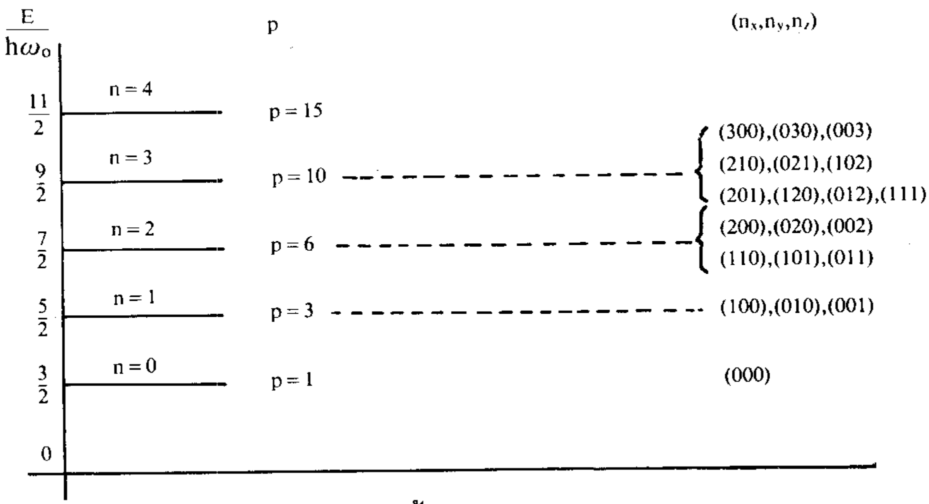
ในกรณีพิเศษคือกรณีซึ่ง $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ ซึ่งหมายถึงว่า ความถี่ของตัวแกว่งกวัดนี้ไม่ขึ้นอยู่กับทิศทาง จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้

$$n = n_x + n_y + n_z \qquad (5\text{-}21)$$

สมการที่ (4-18) จะกลายเป็น

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right) \qquad (5\text{-}22)$$

ระดับพลังงานทุก ๆ ชั้นของตัวแกว่งกวัดนี้จะมีความซ้ำซ้อน ยกเว้นในกรณีของระดับพลังงานที่ต่ำที่สุด ความซ้ำซ้อนจะมีจำนวนเป็น $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$



รูปที่ 1 ระดับพลังงาน ดีกรีของความซ้ำซ้อน และเลขบอกจำนวนควอนตัมของตัวแกว่งกวัดไม่ขึ้นกับทิศในสามมิติ

$$p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{ดีกรีของความซ้ำซ้อน}$$

5.3 ทฤษฎีตัวแกว่งกวัดสามมิติในรูปไม่มีตัวแทน

แฮมมิลโทเนียนของตัวแกว่งกวัดในสามมิติ ซึ่งมีอนุภาคอยู่ที่จุดกำเนิด (origin) โดยมีโพเทนเชียลเป็นศูนย์ที่จุดนั้นอาจจะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} H &= H_x + H_y + H_z \\ H_i &= \frac{1}{2m_0}(p_i^2 + m_0^2\omega^2 r_i^2) \end{aligned} \quad , i = x,y \text{ และ } z \tag{5-23}$$

โดยที่ $r_x = x$, $r_y = y$ และ $r_z = z$

ให้ Σ_x, Σ_y และ Σ_z เป็นปริภูมิของสถานะของระบบซึ่งเกิดจากคู่ของตัวแปรบังคับรูป (p_x,x), (p_y,y) และ (p_z,z) ตามลำดับ ดังนั้นปริมาณ Σ ของระบบนี้จะเกิดจากผลคูณแบบเทนซอร์ของปริภูมิย่อยซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\Sigma = \Sigma_x \otimes \Sigma_y \otimes \Sigma_z \tag{5-24}$$

ความหมายเชิงปฏิบัติของสมการ (5-24) ก็คือ ฟังก์ชันคลื่นของ H จะเป็นผลคูณของฟังก์ชันคลื่นของ H_x, H_y และ H_z ให้ $|n_x,n_y,n_z>$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของ H ในตัวแทนพิกัดสมการ (5-19) $(n_x,n_y,n_z>$ คือ $\Psi(\bar{r})$ จะเห็นว่า

$$|n_x,n_y,n_z> = |n_x>|n_y>|n_z> \tag{5-25}$$

โดยที่ $|n_x>$, $|n_y>$ และ $|n_z>$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของ H_x, H_y และ H_z ตามลำดับ ในตัวแทนพิกัดสมการ (5-25) คือสมการ (5-13) นั่นเอง โดยที่

$$\begin{aligned} H_x|n_x> &= (n_x + \tfrac{1}{2})\hbar\omega|n_x> \\ H_y|n_y> &= (n_y + \tfrac{1}{2})\hbar\omega|n_y> \\ H_z|n_z> &= (n_z + \tfrac{1}{2})\hbar\omega|n_z> \end{aligned} \tag{5-26}$$

$\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$

$$\therefore \quad H|n_x n_y n_z> = (n_x + n_y + n_z + \tfrac{3}{2})\hbar\omega|n_x n_y n_z>$$

$$= (n + \tfrac{3}{2})\hbar\omega(n_x n_y n_z> \qquad (5\text{-}27)$$

$$n = n_x + n_y + n_z$$

เช่นเดียวกับสมการ (3-79) เราอาจจะกำหนดตัวดำเนินการลดระดับ (a_j) ตัวดำเนินการเพิ่มระดับ (a_j^+) j = x,y,z ดังนี้

$$\left.\begin{aligned} a_j &= (\tfrac{1}{2})^{1/2}\left(\frac{r_j}{x_0} + \frac{ix_0}{\hbar}p_j\right) \\ a_j^+ &= (\tfrac{1}{2})^{1/2}\left(\frac{r_j}{x_0} - \frac{ix_0}{\hbar}p_j\right) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}28)$$

โดยที่ $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ และเช่นเดียวกับสมการที่ (3-80) ถึง (3-84)

$$r_j = \frac{x_0}{(2)^{1/2}}(a_j + a_j^+) \qquad (5\text{-}29)$$

$$p_j = \frac{\hbar}{(2)^{1/2} i x_0}(a_j - a_j^+) \qquad (5\text{-}30)$$

$$p_j r_j = \frac{\hbar}{2i}\{a_j^2 - (a_j^+)^2 - a_j^+ a_j + a_j a_j^+\} \qquad (5\text{-}31)$$

$$r_j p_j = \frac{\hbar}{2i}\{a_j^2 - (a_j^+)^2 + a_j^+ a_j - a_j a_j^+\} \qquad (5\text{-}32)$$

$$p_j r_j - r_j p_j = \frac{\hbar}{2i}\{2a_j a_j^+ - 2a_j^+ a_j\} = -i\hbar$$

ถ้า k แทน x, y และ z จะเขียนได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} |a_j, a_k^+| &= \delta_j k \\ |a_j, a_k| = |a_j^+, a_k^+| &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}33)$$

ให้ $|0>$ เป็นสถานะที่ต่ำที่สุดของระบบควอนตัมนี้จะแสดงว่า

$$|0> \;=\; |000>$$

$$a_x|0> \;=\; a_y|0> \;=\; a_z|0> \;=\; 0 \tag{5-34}$$

$$|n_xn_yn_z> \;=\; (n_x!n_y!n_z!)^{-1/2}(a_x^+)^{n_x}(a_y^+)^{n_y}(a_z^+)^{n_z}|0> \tag{5-35}$$

เราอาจจะสร้างตัวดำเนินการซึ่งสังเกตได้ดังนี้

$$N(j) \;\equiv\; a_j^+a_j \qquad (j = x, y \text{ และ } z) \tag{5-36}$$

$N(x)$, $N(y)$ และ $N(z)$ เป็นตัวเลขบวก ซึ่งแสดงจำนวนก้อนพลังงานของตัวแกว่งกวัดตามแนวแกน x, แกน y และแกน z ตามลำดับ ผลบวกของมันคือ

$$N \;=\; N(x) + N(y) + N(z)$$

ทำให้

$$H \;=\; \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega \quad \text{ซึ่งทำให้สมการ (5-27) เป็นจริง}$$

แสดงว่า $N(x)$, $N(y)$ และ $N(z)$ เป็นตัวดำเนินการที่สับเปลี่ยนกันได้ ดังนั้น เวกเตอร์มูลฐานของมันจึงเป็นเวกเตอร์มูลฐานของ H ด้วย จะเห็นว่าเราได้ผลเฉลยเช่นเดียวกับในตอนที่ 5.2 ทุกประการ

เราอาจจะมองปัญหาตัวแกว่งกวัดในสามมิติในเชิงของระบบซึ่งสนามมีทิศเข้าสู่ศูนย์กลางดังที่เราได้หาผลเฉลยไว้ในบทที่ 4 ก็ได้ เนื่องจาก

$$\vec{\ell} \;=\; \vec{r} \times \vec{p}$$

เราอาจจะหาผลเฉลยของ H เสียใหม่ จะเห็นว่าตัวดำเนินการ H, ℓ^2 และ ℓ_z เป็นตัวดำเนินการที่สับเปลี่ยนกันได้ ทำให้เราสามารถที่จะหาชุดของไอเกนเวกเตอร์ร่วม ซึ่งในที่นี้เราจะกำหนดให้เป็น $|n\ell m>$ โดยที่

$$\left.\begin{aligned} H|n\ell m> &= \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega|n\ell m> \\ \ell^2|n\ell m> &= \ell(\ell+1)\hbar^2|n\ell m> \\ \ell_z|n\ell m> &= m\hbar|n\ell m> \end{aligned}\right\} \tag{5-37}$$

$|n\ell m>$ เป็นชุดของเวกเตอร์ออร์ทอนอร์มอลที่สมบูรณ์ชุดหนึ่ง ดังนั้น $|n\ell m>$ อาจจะหาได้จากชุด $|n_x n_y n_z>$ โดยใช้การแปลงแบบยูนิทารี แต่เราจะไม่สนใจกับปัญหานี้ในตอนนี้ ปัญหาที่เราจะแก้ในขณะนี้ก็คือการหาจำนวนค่าของเลขควอนตัม ℓ และ m ซึ่งจะมีได้เมื่อกำหนดค่า n ให้ค่าหนึ่ง เพื่อให้สะดวกในการแก้ปัญหานี้เราจะกำหนดตัวดำเนินการขึ้นมาชุดหนึ่งคือ A_m $(m = 1, 0, -1)$ โดยกำหนดให้

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{(2)^{1/2}}(a_x - ia_y) \\ A_0 &= a_z \\ A_{-1} &= \frac{1}{(2)^{1/2}}(a_x + ia_y) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}38)$$

จะเห็นว่าสังยุคเชิงซ้อนของมันก็คือ A_m^+ โดยที่

$$\left.\begin{aligned} A_1^+ &= \frac{1}{(2)^{1/2}}(a_x + ia_y) \\ A_0^+ &= a_z^+ \\ A_{-1}^+ &= \frac{1}{(2)^{1/2}}(a_x^+ - ia_y^+) \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}39)$$

เราอาจจะหาวงเล็บการสับเปลี่ยนของสมการชุด (5-38) และ (5-39) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} |A_1, A_1^+| &= \frac{1}{2}\{(a_x - ia_y)(a_x^+ + ia_y^+) - (a_x^+ + ia_y^+)(a_x - ia_y)\} \\ &= \frac{1}{2}\{a_x a_x^+ - a_x^+ a_x) - i(a_y a_x^+ + a_y^+ a_x) + i(a_x^+ a_y + a_x a_y^+) \\ &\quad + (a_y a_y^+ - a_y^+ a_y)\} \end{aligned}$$

และจากสมการชุด (5-33)

$$|A_1, A_1^+| = 1$$

โดยการใช้สมการชุด (5-33) เราอาจจะพิสูจน์ได้ว่า

$$[A_1,A_0^+] = 0$$
$$[A_1,A_{-1}^+] = 0$$
$$[A_0,A_1^+] = 0$$
$$[A_0,A_0^+] = 1$$
$$[A_0,A_{-1}^+] = 0$$
$$[A_{-1},A_1^+] = 0$$
$$[A_{-1},A_0^+] = 0$$
$$[A_{-1},A_{-1}^+] = 1$$

ซึ่งเราอาจจะเขียนสรุปได้ว่า

$$[A_m,A_n^+] = \delta_{mn} \quad ; \quad m,n = 1,0,-1$$

ในขณะที่

$$[A_m,A_n] = [A_m^+,A_n^+] = 0 \qquad (5\text{-}40)$$

สมการชุด (5-40) ทำให้เราสามารถหาตัวดำเนินการซึ่งอาจจะสังเกตได้

$$N_m = A_m^+A_m \qquad (5\text{-}41)$$

แสดงว่า N_1 N_0 และ N_{-1} เป็นตัวดำเนินการซึ่งสับเปลี่ยนกันได้ชุดหนึ่ง

$$\left.\begin{aligned} H &= (N_1+N_0+N_{-1}+\tfrac{3}{2})\hbar\omega \\ N &= N_1+N_0+N_{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}42)$$

ซึ่ง N_1, N_0 และ N_{-1} มีค่าไอเกนเป็น n_1, n_0 และ n_{-1} ตามลำดับ เราอาจจะหาค่าไอเกนเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$|n_1n_0n_{-1}> = (n_1!n_0!n_{-1}!)^{-1/2}(A_1^+)^{n_1}(A_0^+)^{n_0}(A_{-1}^+)^{n_{-1}}|000> \qquad (5\text{-}43)$$

โดยที่ $H\,|n_1 n_0 n_{-1}> \;=\; (n+\frac{3}{2})\,\hbar\omega\,|n_1 n_0 n_{-1}>$ (5-44)

$$n = n_1 + n_0 + n_{-1}$$

ไอเกนเวกเตอร์ของสมการ (5-43) ไม่จำเป็นต้องเป็นไอเกนเวกเตอร์ของ ℓ^2 แต่เป็นไอเกนเวกเตอร์ของ ℓ_z เพราะว่า

$$\ell_z = (N_1 - N_{-1})\,\hbar \tag{5-45}$$

ทำให้ $$m = n_1 - n_{-1} \tag{5-46}$$

แต่เนื่องจากแต่ละค่า n จะมีสถานะได้ $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ สถานะ ทำให้มีค่า ℓ ได้จำกัดดังนี้

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} & \ell = n, n-2, n-4, \ldots, 0 \\ \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} & \ell = n, n-2, \ldots, 1 \end{array}\right\} \tag{5-47}$$

จะเห็นว่า ถ้า c_m เป็นจำนวนสถานะซึ่งมีค่า m เดียวกันแต่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน จำนวน c_m จะมีค่าดังนี้ (m มีค่าจาก n ถึง $-n$)

$$\left.\begin{array}{lcccccccc} |m| & = & n & n-1 & n-2 & \ldots & n-2s & n-(2s+1) & n-(2s+2)\ldots \\ c_m & = & 1 & 1 & 2 & \ldots & s+1 & s+1 & s+2 \end{array}\right\} \tag{5-48}$$

ตัวอย่างเช่น $n=5$ จำนวนสถานะซึ่งมีค่าไอเกนเดียวกัน $6\frac{1}{2}\,\hbar\omega$ คือ $\frac{1}{2}(5+1)(5+2) = 21$ ค่า $\ell=5$ จะมี 11 สถานะ ค่า $\ell=3$ จะมี 7 สถานะ และค่า $\ell=1$ จะมี 3 สถานะ รวมเป็น 21 สถานะ

จะเห็นว่าตัวดำเนินการเฮอร์มิเชียนมี 9 ตัวคือ H, N, ℓ_z, H_x, H_y, H_z, N_1, N_0 และ N_{-1}

5.4 ทฤษฎีตัวแกว่งกวัดสามมิติกับสัจพจน์ของกลศาสตร์ควอนตัม

เราอาจจะเขียนตารางเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีตัวแกว่งกวัดในสามมิติเป็นไปตามสัจพจน์ของกลศาสตร์ควอนตัมดังนี้

สัจพจน์ของกลศาสตร์ควอนตัม	ทฤษฎีตัวแกว่งกวัดในสามมิติ
สัจพจน์ที่ 1 อนุภาคในระบบอนุรักษ์ใด ๆ ประกอบด้วยฟิลด์อนุรักษ์และแรงอนุรักษ์ จะมีฟังก์ชันคลื่นฟังก์ชันหนึ่งซึ่งสามารถหาค่าต่าง ๆ ได้ทุกชนิด	1. $H = H_x + H_y + H_z$ $= \frac{1}{2m_0} \{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + m_0^2\omega^2(x^2+y^2+z^2)\}$ เป็นระบบอนุรักษ์ ฟังก์ชันคลื่นคือ $\|n_x n_y n_z>$ หรือ $\|n\ell m>$ อย่างใดอย่างหนึ่ง
สัจพจน์ที่ 2 แต่ละปริมาณกายภาพที่สังเกตได้จะมีตัวดำเนินการตัวหนึ่งสำหรับปริมาณชนิดหนึ่ง	2. $H\|n\ell m> = (n+\frac{3}{2})\hbar\omega\|n\ell m>$ $N\|n\ell m> = n\|n\ell m>$ $\ell_z\|n\ell m> = m\hbar\|n\ell m>$ $N(x)\|n_x n_y n_z> = n_x\|n_x n_y n_z>$ $N(y)\|n_x n_y n_z> = n_y\|n_x n_y n_z>$ $N(z)\|n_x n_y n_z> = n_z\|n_x n_y n_z>$ $N_1\|n_1 n_0 n_{-1}> = n_1\|n_1 n_0 n_{-1}>$ $N_0\|n_1 n_0 n_{-1}> = n_0\|n_1 n_0 n_{-1}>$ $N_{-1}\|n_1 n_0 n_{-1}> = n_{-1}\|n_1 n_0 n_{-1}>$
สัจพจน์ที่ 3 ตัวดำเนินการใด ๆ ซึ่งแทนปริมาณที่วัดได้ทางกายภาพเป็นเฮอร์มีเชียน	3. $H, N, \ell_z, N(x), N(y), N(z), N_1, N_0$ และ N_{-1} เป็นเฮอร์มีเชียน
สัจพจน์ที่ 4 จะมีชุดฟังก์ชันคลื่นที่เป็นชุดออร์ทอนอร์มอล ใช้เป็นชุดฟังก์ชันคลื่นมูลฐาน	4. มีชุดฟังก์ชันคลื่นออร์ทอนอร์มอลถึง 3 ชุด คือ $\|n\ell m>$, $\|n_x n_y n_z>$ และ $\|n_1 n_0 n_{-1}>$ ฟังก์ชันคลื่นใด ๆ $\Psi(\bar{r})$ อาจจะกระจายในรูปของผลบวกของชุดฟังก์ชันคลื่นชุดใดชุดหนึ่งเช่น $\Psi(\bar{r}) = \sum_{n,\ell m} C(n,\ell,m)\|n\ell m>$

- ทฤษฎี ถ้าตัวดำเนินการ Q และ R สับเปลี่ยนกันได้จะมีฟังก์ชันไอเกนชุดหนึ่ง ซึ่งเป็นฟังก์ชันไอเกนของตัวดำเนินการทั้งสองพร้อมกัน

- ตัวอย่างทฤษฎี เช่น

$|H,\ell_z|$ มีฟังก์ชันไอเกน 2 ชุด คือ $|n\ell m>$ และ $|n_1 n_0 n_{-1}>$ เป็นฟังก์ชันไอเกนร่วม

สัจพจน์ที่ 5 ถ้าหากระบบฟิสิกส์ที่กำหนดให้สามารถแทนได้ด้วยฟังก์ชันคลื่น Ψ ค่าคาดหมายของปริมาณที่สังเกตได้ q ซึ่งคล้องจองกับตัวดำเนินการ Q จะหาได้ดังนี้

$$<q> = <\Psi|Q|\psi>$$

5. จะเห็นว่า

$$<n\ell m|H|n\ell m> = \left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$
$$<n\ell m|N|n\ell m> = n$$
$$<n\ell m|\ell_z|n\ell m> = m\hbar$$
$$<n_x n_y n_z|N(x)|n_x n_y n_z> = n_x$$
$$<n_x n_y n_z|N(y)|n_x n_y n_z> = n_y$$
$$<n_x n_y n_z|N(z)|n_x n_y n_z> = n_z$$
$$<n_1 n_0 n_{-1}|N_1|n_1 n_0 n_{-1}> = n_1$$
$$<n_1 n_0 n_1|N_0|n_1 n_0 n_{-1}> = n_0$$
$$<n_1 n_0 n_{-1}|N_{-1}|n_1 n_0 n_{-1}> = n_{-1}$$

สัจพจน์ที่ 6 ฟังก์ชันคลื่น $\Psi(\bar{r},t)$ จะแปรผันเมื่อเวลาเปลี่ยนไปดังนี้

$$H\Psi = ih\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

6. ฟังก์ชันคลื่นของตัวแกว่งกวัดในสามมิติ อาจจะเขียนในรูปของ $\Psi(\bar{r},t)$ ได้ดังนี้

$$\Psi(\bar{r},t) = \Psi(\bar{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$\therefore \quad H\,\Psi(\bar{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi(\bar{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\right)$$

$$= E_n\,\Psi(\bar{r},t)$$

ทำให้ $H\,\Psi(\bar{r}) = \left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega\Psi(\bar{r})$

สัจพจน์ที่ 7 กลศาสตร์แบบฉบับทำให้เป็นกลศาสตร์ควอนตัมได้แบบหนึ่ง

7. สมการที่ (5-33)

$$|p_j,r_k| = -i\hbar\delta_{jk} \qquad (5\text{-}49)$$

คือ แทนตัวแปรพลวัตในวงเล็บของปัวซอง ด้วยตัวดำเนินการของวงเล็บการสับเปลี่ยนที่สอดคล้องกัน แล้วคูณด้วย $\frac{1}{i\hbar}$

$j,k = x,y,z$

$r_x = x, \quad r_y = y, \ r_z = z$

สัจพจน์ที่ 8 กลศาสตร์ควอนตัม เมื่อนำไปประยุกต์กับระบบใหญ่ ๆ จะต้องคล้องจองกับกลศาสตร์แบบฉบับ

8. ในกลศาสตร์ควอนตัม

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + \frac{1}{2}m_0(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)$$

ในกลศาสตร์แผนเดิม

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2}m_0(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2)$$

ผลเฉลยของตัวดำเนินการ H ในกลศาสตร์ควอนตัมต้องคล้องจองกับค่าที่ได้จากตัวแปรพลวัตในกลศาสตร์แผนเดิม