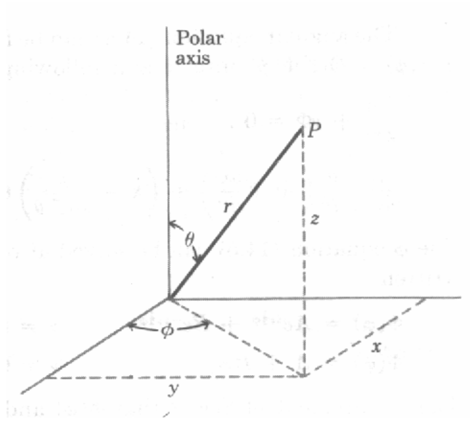
บทที่ 8
ศักย์สมมาตรทรงกลมสามมิติ

ในบทนี้จะศึกษาอนุภาคภายใต้ศักย์สมมาตรทรงกลม(Spherically symmetric potential) ใน 3 มิติซึ่งเป็นสภาวะปกติของอนุภาคทั่วไป



รูปที่ 8.1 ระบบพิกัดทรงกลม

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi$$
$$z = r \cos\theta$$

8.1 การแบ่งฟังก์ชันคลื่น

ในหนึ่งมิติสมการชเรอดิงเงอร์จะอยู่ในรูป $-\frac{\hbar^2}{2m} d^2\psi \big/ dx^2$ ซึ่งพลังงานศักย์ของอนุภาค คือ $\frac{p^2}{2m}$ แต่ในระบบ 3 มิติพลังงานศักย์จะอยู่ในรูป $\frac{\left(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2\right)}{2m}$ ทำให้

สมการชเรอดิงเงอร์อยู่ในรูป

$$-\frac{\eta^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]u+v(r)u=Eu$$

แยกส่วนรัศมีกับมุมออกจากกัน

$$v(r,\theta,\phi)=R(r)y(\theta,\phi)$$

สมการคลื่นจะกลายเป็น

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{2mr^2}{\eta^2}\left[E-V(r)\right]$$
$$=-\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right]=\lambda$$

จากกลศาสตร์ดั้งเดิม ถ้าอนุภาคถูกกระทำโดย ศักย์สมมาตรทรงกลม $V(x,y,z)=V(r)$ จะทำให้โมเมนตัมเชิงมุม เป็นค่าคงที่สำหรับการเคลื่อนที่ สำหรับกลศาสตร์ควอนตัมหมายความว่า ตัวดำเนินการโมเมนตัมเชิงมุม L^2 จะสลับที่ได้กับแฮมิลโทเนี่ยน

$$H=\frac{p^2}{2m}+V(r)$$
$$=-\frac{\eta^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{L^2}{2mr^2}+V(r)$$

จะเห็นว่า แฮมิลโทเนี่ยน ที่ขึ้นกับมุม คือ L^2 ทำให้สามารถแยก ฟังก์ชันคลื่นได้เป็น 2 ส่วน

จะได้สมการเชิงรัศมี

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr}{dR}\right)+\left\{\frac{2m}{\eta^2}\left[E-V(r)\right]-\frac{\lambda}{r^2}\right\}R=0$$

และสมการเชิงมุม

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}+\lambda Y=0$$

แยกสมการเชิงมุมต่อ ให้ $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ จะได้

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\nu\Phi=0 \qquad \text{……………………(8.1)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\nu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0 \qquad \text{……………………(8.2)}$$

คำตอบของสมการ (8.1) คือ

$$\Phi(\phi)=Ae^{i\nu^{\frac{1}{2}}\phi}+Be^{-i\nu^{\frac{1}{2}}\phi} \qquad \nu\neq 0$$

$$\Phi(\phi)=A+B\phi \qquad \nu=0$$

$\Phi(\phi)$ และ $\frac{d\Phi}{d\phi}$ ต้องมีค่าต่อเนื่องในช่วง $0\rightarrow 2\pi$

$$\Phi_m(\phi)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{im\phi}$$

สำหรับสมการ (8.2) จะใช้พนุนามเลอจอง (Legendre polynomials)

ให้ $w = \cos\theta \Rightarrow \Theta(\theta) = p(w)$ จะได้

$$\frac{d}{dw}\left[\left(1-w^2\right)\frac{dp}{dw}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)p = 0 \qquad \text{.....................(8.3)}$$

เนื่องจาก θ อยู่ระหว่าง $0 \to \pi$ ดังนั้น w จะอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1

คำตอบเมื่อ m = 0 จะอยู่ในรูปเลอจอง โพลิโนเมียล $p_l(w)$

กำหนด ฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$T(w,s) = (1-2sw+s^2)^{-1/2}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} p_l(w)s^l \qquad \text{เมื่อ } s<1$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ w และ s จะได้

$$(1-w^2)p_l' = -lwp_l + lp_{l-1} \qquad \text{.................(8.4)}$$

$$(l+1)p_{l+1} = (2l+1)wp_l - lp_{l-1} \qquad \text{.................(8.5)}$$

สมการอนุพันธ์ลำดับต่ำที่สุดจะประกอบด้วย P_l ซึ่งสามารถสร้างจากสมการ 14.11 จะได้สมการเหมือน 14.9 เมื่อ $\lambda = l(l+1)$ และ m = 0

ถ้า $m \neq 0$ สมการที่ 14.9 จะมีคำตอบที่ยอมรับได้เมื่อ $\lambda = l(l+1)$ และ $|m| \leq l$ ซึ่งสามารถเขียนในเทอมของพหุนามเลอจองโพลิโนเมียล

$$p_l^m(w) = (1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} \frac{d^{|m|}}{dw^{|m|}} p_l(w)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือ

$$T_m(w,s) = \frac{(2|m|)!(1-w^2)^{\frac{1}{2}|m|} s^{|m|}}{2^{|m|}(|m|)!(1-2sw+s^2)^{|m|+\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{l=|m|}^{\infty} p_l^m(w) s^l$$

8.2 ฮาร์มอนิกทรงกลม (spherical harmonics)

ส่วนสมการเชิงมุม $Y_{lm} = (\theta, \phi)$ ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ เรียกว่าฮาร์มอนิกทรงกลม

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = N_{lm} P_l^m(\cos\theta)\Phi_m(\phi)$$

เมื่อ $\Phi_m(\phi)$ ได้จากสมการ 14.8 และ N_{lm} เป็นค่าคงที่ของการนอร์มอลไลซ์

เพื่อความสะดวกเราเขียนฮาร์มอนิกทรงกลม

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \varepsilon \left[\frac{2l+1(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right]^{1/2} p_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

เมื่อ $\varepsilon = (-1)^m$ เมื่อ m>0 และ $\varepsilon = 1$ เมื่อ $m \le 0$

ตัวอย่าง ฮาร์มอนิกทรงกลม ลำดับต้นๆ

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2,0} = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_{2,\pm1} = \mp\left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}) \qquad Y_{2,\pm2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta e^{\mp 2i\phi}$$

8.3 โมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum)

ให้ $R(r) = X(r)/r$ จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2X}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]X = EX$$

เทียบได้กับ 1 มิติ ที่มีพลังงานศักย์

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

กลศาสตร์ดั้งเดิม $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

ในกลศาสตร์ควอนตัม

$$L_x = yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y = zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$L_z = xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

และ

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

8.4 ความสัมพันธ์สลับที่ (Commutation relations)

สำหรับพิกัดคาร์ทีเซียน ,ความสัมพันธ์สลับที่ระหว่าง $L_j \left(j = x , y , z \right)$ คือ

$$\left[L_x , L_y \right] = i\eta L_z$$

$$\left[L_y , L_z \right] = i\eta L_x$$

$$\left[L_z , L_x \right] = i\eta L_y$$

$$\left[L^2 , L \right] = 0 \Rightarrow \left[L^2 , L_z \right] = \left[L^2 , L_x \right] = \left[L^2 , L_y \right] = 0$$

$$\left[L_j , r_j \right] = i\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$\left[L_j , p_j \right] = i\eta \sum_k \varepsilon_{ijk} p_k$$

$$\left[L_j , p^2 \right] = \left[L_i , r^2 \right] = \left[L_i , rp \right] = 0$$

$= 1$ เมื่อ ijk = cyclic permutation

$\varepsilon_{ijk} = -1$ เมื่อ ijk = anti-cyclic permutation

$= 0$ อื่นๆ

8.5 ตัวดำเนินการเพิ่มและลดค่า (Lowering and Raising operator)

ตัวดำเนินการเพิ่มค่า $L_+ = L_x + iL_y$

ตัวดำเนินการลดค่า $L_- = L_x - iL_y$

ดังนั้น

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \qquad\qquad L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

L_+ และ L_- ไม่เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเที่ยน(Hermitian operator) จะได้ว่า

$$L^2 = L_x^2 + \frac{1}{2}\left(L_+L_- + L_-L_+\right)$$

และ

$$L_+L_- = L^2 - L_z^2 + \eta L_Z = L_-L_+$$

จะได้ความสัมพันธ์สลับที่

$$\left[L^2, L_\pm\right] = 0$$

$$\left[L_z, L_\pm\right] = \pm\eta L_\pm$$

$$\left[L_+, L_-\right] = 2\eta L_Z$$

8.6 พีชคณิตของโมเมนตัมเชิงมุม

ตัวดำเนินการ L^2 และ L_z เป็น ตัวดำเนินการเฮอร์มิเที่ยน

$$\left(L_i\right)^+ = L_i \Rightarrow \left(L^2\right)^+ = L^2$$

ตัวดำเนินการ L^2 และ L_z ตัวดำเนินการสลับที่

$$[L^2, L_z] = 0$$

ดังนั้น

$$L^2 \mid lm >= l(l+1)\eta^2 \mid lm >$$

$$L_z \mid lm >= m\eta \mid lm >$$

$$L_+ \mid lm >= \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\eta \mid l, m+1 >$$

$$= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\eta \mid l, m+1 >$$

$$L_- \mid lm >= \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\eta \mid l, m-1 >$$

$$= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\eta \mid l, m-1 >$$

ถ้า |lm> เป็นไอเกนเวกเตอร์ ของ L^2 โดยมีค่าไอเกน l(l+1) สำหรับ l ค่าหนึ่ง จะมีค่าไอเกน ที่เป็นไปได้ของ L_z จำนวน 2l+1

$$m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$$

ดังนั้น

$$L_+ \mid l, l >= 0 \quad \text{และ} \quad L_- \mid l, -l >= 0$$

มูลฐาน |lm> จะ ออร์โทนอร์แมล

$$< l_1 m_1 \mid l_2 m_2 >= \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2}$$

มูลฐาน นี้เรียกว่า มูลฐานมาตรฐาน

ความสัมพันธ์ปิด ของ มูลฐานมาตรฐานคือ

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{\infty} \mid lm >< lm \mid = 1$$

8.7 พิกัดชนิดขั้วทรงกลม (spherical polar coordinate)

$$L_x = i\eta(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi})$$

$$L_y = i\eta\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_z = -i\eta\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$$= -\eta^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

$Y_{lm}(\theta,\phi)$ เป็น ไอเกนฟังก์ชัน ของ L^2 โดยมี ค่าไอเกน $l(l+1)h^2$

$$L^2 Y_{lm}(\theta,\phi) = l(l+1)\eta^2 Y_{lm}(\theta,\phi)$$

เช่นเดียวกัน

$Y_{lm}(\theta,\phi)$ เป็น ไอเกนฟังก์ชัน ของ L_z โดยมี ค่าไอเกน $m\eta^2$

$$L_z Y_{lm}(\theta,\phi) = m h^2 Y_{lm}(\theta,\phi)$$

$$L_+ = \eta e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_- = \eta e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

ดังนั้น ไอเกนเวกเตอร์ ของ L^2 และ L_z จึงขึ้นอยู่กับมุม θ , ϕ อย่างเดียว

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_l^m(\theta,\phi)$$

สำหรับศักย์สู่ศูนย์กลาง(central potential) V(r) = V(r)

$Y_l^m(\theta,\phi)$ จะเป็น ฮาร์มอนิกทรงกลม ซึ่ง

$$|\, lm \;>= Y_l^m(\theta,\phi)$$

สำหรับ m >0

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}p_l^m(\cos\theta)e^{im}$$

สำหรับ m<0

$$Y_l^m(\theta,\phi) = (-1)^{|m|} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+m)!}}p_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im}$$

$p_l^m(x)$ เป็นฟังก์ชันเลอจองรวมตัว(associated Legendre functions)

โดยที่

$$p_l^m(x) = \sqrt{(1-x)^m}\frac{d^m}{dx^m}p_l(x)$$

เมื่อ $p_l(x)$ เป็นพนุนามเลอจอง

$$p_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(1-x^2)^l$$

8.8 รูปเมทริกซ์ของโมเมนตัมเชิงมุม

สมาชิกเมทริกซ์ A_{ij} ซึ่งแทน ตัวดำเนินการ A จะเข้ากันได้กับ

$$A_{ij} = < l_i \mid A \mid l_j >$$

ดังนั้น ทุกๆ l = ค่าคงที่ เราสามารถเขียน เมทริกซ์ $(2l+1)\times(2l+1)$ สำหรับ L^2, L_x, L_y, L_z

$$\left(L^2\right)_{ij} = < L_i \mid L^2 \mid L_j > = l(l+1)\eta^2\delta_{ij}$$

$$\left(L_x\right)_{ij} = < l_i \mid L_x \mid l_j > = \frac{\eta}{2}\left[\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\delta_{i,j+1} + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\delta_{i,j-1}\right]$$

$$\left(L_y\right)_{ij} = < l_i \mid L_y \mid l_j > = \frac{\eta}{2}\left[\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\delta_{i,j+1} - \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\delta_{i,j-1}\right]$$

$$\left(L_z\right)_{ij} = < l_i \mid L_z \mid l_j > = j\eta\delta_{ij}$$

สำหรับ l = 1 ยกตัวอย่าง

|11>|10>|1,-1>

$$L^2 = 2\eta^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} |\,11> \\ |\,10> \\ |\,1-1> \end{array}$$

และ

|11> |10> |1-1>

$$L_x = \frac{\eta}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} |\,11> \\ |\,10> \\ |\,1-1> \end{array}$$

$$
L_y = \frac{\eta}{\sqrt{2}}
\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} |11> & |10> & |1\text{-}1> \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} |\,11> \\ |\,10> \\ |\,1-1> \end{array}
\end{array}
$$

$$
L_z = h
\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccc} |11> & |10> & |1\text{-}1> \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} |11> \\ |10> \\ |1-1> \end{array}
\end{array}
$$

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณา ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$

$L_+|lm> = h\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\,|\,l,m+1>$

$L_-|lm> = h\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\,|\,l,m-1>$

$L_z|lm> = m h \;|\, lm >$

$L^2|lm> = l(l+1)h^2 \;|\, lm >$

เมื่อพิจารณาระบบ ซึ่ง $l = 1$ จงหาเมทริกซ์ของ L_x, L_y, L_z และ L^2 ในรูปของมูลฐานของไอเกนเวกเตอร์ ของ L_z และ L^2

วิธีทำ L_x, L_y, L_z และ L^2 เป็นตัวดำเนินการเฮอร์มิเที่ยนซึ่งสมาชิกแต่และตัว $a_{ij} = a_{ji}^*$ สำหรับระบบที่มี โมเมนตัมเชิงมุม l = 1 จะมีไอเกนเวกเตอร์ของ L ดังนี้

|1> เมื่อ l = 1 , m = 1

|0> เมื่อ l = 1 , m = 0

|-1> เมื่อ l = 1 , m = -1

ถ้าต้องการหา รูปแทนเมทริกซ์ของ L_x เราจะต้องคำนวณความสัมพันธ์

$$L_x|1> = \frac{1}{2}(L_+ + L_- \,|\, 1 > = \frac{1}{2} L_- \,|\, 1> = \frac{h}{\sqrt{2}} \,|\, 0>$$

$$L_x|0> = \frac{1}{2} (L_+ + L_- \,|\, 0 > = \frac{h}{\sqrt{2}} (|\, 1> + |\, -1>)$$

$$L_x|-1> = \frac{1}{2} (L_+ + L_- \,|\, -1 > = \frac{1}{2} L_+ \,|\, -1> = \frac{h}{\sqrt{2}} \,|\, 0>$$

ถ้าเราเลือก มูลฐานมาตรฐาน

$$|1> = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad |0> = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \qquad |-1> = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

ดังนั้น รูปแทนเมทริกซ์ของ L_x คือ

$$L_x = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

เช่นเดียวกัน สำหรับ Ly

$$L_y|1> \;=\; \frac{1}{2i}\,(L_+ - L_-)|1> \;=\; \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\;|0>$$

$$L_y|0> \;=\; -\frac{1}{2i}\,(L_+ - L_-)|0> \;=\; \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}\;|-1> - |1>$$

$$\mathbf{L_y|-1>} \;=\; \frac{1}{2i}\,\mathbf{(L_+ - L_-)|-1>} \;=\; \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}}\;|\mathbf{0}>$$

ดังนั้น

$$L_y \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$$

สำหรับ L_z เรามี $L_z|1> = \hbar|1>$, $L_z|0> = 0$ และ $L_z|-1> = -\hbar|-1>$ ดังนั้น

$$Lz \;=\; \hbar$$

สำหรับ L^2 เรามี $L^2|1> = 2\hbar^2|1>$, $L^2|0> = 2\hbar^2|0>$ และ $L^2|-1> = 2\hbar^2|-1>$ ดังนั้น

$$L^2 \;=\; 2\hbar^2$$

แบบฝึกหัดแบบที่ 8

1. จงพิสูจน์ว่า ก) $\left[L^2, L_Z\right] = 0$ ข) $\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar \vec{L}$

2. จงหาโอกาสในการวัด L_x แล้วได้ค่าศูนย์สำหรับระบบที่มีโมเมนตัมเชิงมุม = 1 และอยู่ภายในสเตท $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

3. จงคำนวณหาค่าฟังก์ชัน

$$y_l^m\left(\theta, \Phi\right) \text{ เมื่อ } m = 0, \pm 1$$

4. อนุภาคภายใต้ศักย์สู่ศูนย์กลาง กำหนดให้ $\left|l_m\right\rangle$ เป็นไอเกนสเตท L^2 และ L_Z
   ก) จงหาผลบวก $\Delta L_x^{\ 2} + \Delta L_y^{\ 2}$
   ข) l และ m ค่าใดที่ทำให้ผลบวกในข้อ ก) เป็นศูนย์

5. พิจารณาแฮลมิลโทเนียนของตัวกวัดแกว่งฮาร์มอนิก 3 มิติ

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2m}\left(p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} + p_z^{\ 2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

   ก) จงเขียนแฮลมิลโทเนียนในพิกัดทรงกลม
   ข) จงหาไอเกนฟังก์ชันของแฮลมิลโทเนียนในพิกัดทรงกลม
   ค) จงหาค่าไอเกนพลังงาน

6. สำหรับระบบที่มีโมเมนตัมเชิงมุม $l = 1$ จงหาค่าไอเกนและไอเกนเวกเตอร์ของ $L_x L_y + L_y L_x$